Mathématiques et Informatique de la Décision et des Organisations

Introduction aux séries temporelles

Master 1 Mathématiques Appliquées

Annales d'examens

Année 2015/2016

Quartier d'affaires de la Défense et bois de Boulogne
Vus du bureau B518-bis de l'Université Paris-Dauphine

DAUPHINE UNIVERSITÉ PARIS | MIDO MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE DE LA DECISION ET DES ORGANISATIONS

Version électronique composée avec LaTeX le 15 juillet 2016

— Auteurs des sujets et corrigés :
  — Djalil Chafaï (enseignant Paris-Dauphine, 2013–)
  — Marc Hoffmann (enseignant Paris-Dauphine, 2012–2013)

Examen partiel

Durée : 2 heures

Conditions : sans calculatrice ni documents

Exercice 1 (Filtrage d'un bruit blanc)**.** Soit $(\xi_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires (réelles) indépendantes, identiquement distribuées, de carré intégrable, et telles que

$$\mathbb{E}[\xi_t] = 0 \text{ et } \mathbb{E}[\xi_t^2] = \sigma^2, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ le processus défini par

$$\varepsilon_t = U\xi_t, \ \ t \in \mathbb{Z},$$

où U est une variable aléatoire de carré intégrable, indépendante de $(\xi_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et telle que

$$\mathbb{E}[U^2] = \rho^2.$$

1. Montrer que $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc faible dont on explicitera la variance.
2. Le processus $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est-il un bruit blanc fort ?

On définit le filtre $\psi = (\psi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ par $\psi_k = 2^{-k}$ pour $k \geq 1$ et $\psi_k = 0$ pour $k \leq 0$.

3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{Z}$, la variable aléatoire

$$X_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k \varepsilon_{t-k}$$

est bien définie et de carré intégrable.

4. Montrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire et causal.
5. Calculer l'autocovariance $\gamma_X(h)$ de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ en fonction de σ^2 et ρ^2.

Exercice 2 (Modèle AR(1) bruité)**.** Soit $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus MA(1) s'écrivant

$$Z_t = U_t + \theta U_{t-1}, \ \ t \in \mathbb{Z}, \tag{$\star$}$$

où $\theta \in \mathbb{R}$ et $(U_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc faible de variance σ^2.

1. Justifier le fait que $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus stationnaire.
2. Calculer la fonction d'autocovariance de $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

On admettra dans la suite qu'un processus stationnaire ayant la même fonction d'autocovariance que $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un MA(1) admettant la représentation $(\star)$.

On considère le processus $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini par

$$Y_t = 2Y_{t-1} + \varepsilon_t, \ t \in \mathbb{Z}$$

où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc faible de variance $\frac{5}{18}$. On suppose que $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est entaché d'une erreur d'observation : on observe

$$X_t = Y_t + \eta_t, \ \ t \in \mathbb{Z},$$

où $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc faible de variance $\frac{1}{6}$ et non-corrélé[1] avec $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

1. C'est-à-dire $\mathbb{E}[\varepsilon_t\eta_\ell] = 0$ pour tous $t, \ell \in \mathbb{Z}$.

3. Montrer que le processus $(W_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini par

$$W_t = \varepsilon_t + \eta_t - 2\eta_{t-1},\ t \in \mathbb{Z}$$

   est un processus MA(1), c'est-à-dire qu'il admet la représentation $(\star)$ pour des valeurs θ et σ^2 que l'on déterminera.
4. En déduire que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est solution d'une équation ARMA que l'on explicitera.

Exercice 3 (Construction d'un processus stationnaire)**.** Soient U une variable aléatoire sur $\mathbb{T} = [-\pi, \pi)$ de loi $\mathbb{P}_U$, et Z une variable aléatoire réelle, indépendante de U, de carré intégrable et centrée. On pose

$$X_t = Z \exp(itU), \quad t \in \mathbb{Z}.$$

1. Montrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est stationnaire centré.
2. Montrer que la fonction d'autocovariance de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est donnée par

$$\gamma_X(h) = \mathbb{E}[Z^2] \int_{\mathbb{T}} e^{ih\omega} \mathbb{P}_U(d\omega), \quad h \in \mathbb{Z}.$$

3. Montrer que si la loi $\mathbb{P}_U$ est symétrique [2], alors γ_X est réelle et paire.
4. Montrer que si ξ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{T} = [-\pi, \pi)$, alors la fonction caractéristique $\Phi_\xi(t) = \mathbb{E}[e^{it\xi}]$ de ξ définit pour $t \in \mathbb{Z}$ la fonction de covariance d'un processus stationnaire à valeurs dans $\mathbb{C}$.

2. La loi $\mathbb{P}_U$ est symétrique si pour toute $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ bornée, on a $\int_{\mathbb{T}} \varphi(\omega)\mathbb{P}_U(d\omega) = \int_{\mathbb{T}} \varphi(-\omega)\mathbb{P}_U(d\omega)$.

English version

Exercise 1 (White noise filtering)**.** Let $(\xi_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ be a sequence of (real-valued) square integrable, independent random variables, with same distribution, and such that

$$\mathbb{E}[\xi_t] = 0 \text{ and } \mathbb{E}[\xi_t^2] = \sigma^2, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Let $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ be the random process defined by

$$\varepsilon_t = U\xi_t, \ \ t \in \mathbb{Z},$$

where U is a square integrable random variable, independent of $(\xi_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ and such that

$$\mathbb{E}[U^2] = \rho^2.$$

1. Show that the process $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is a weak white noise and compute its variance.
2. Is $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ a strong white noise?

Let us define $\psi = (\psi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ by $\psi_k = 2^{-k}$ for $k \geq 1$ and $\psi_k = 0$ for $k \leq 0$.

3. Show that for every $t \in \mathbb{Z}$, the random variable

$$X_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k \varepsilon_{t-k}$$

is well-defined and square integrable.

4. Show that the process $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is stationary and causal.
5. Compute the autocovariance γ_X of $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ and express it with σ^2 and ρ^2.

Exercise 2 (Noisy AR(1) process)**.** Let $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ be a MA(1) process with representation

$$Z_t = U_t + \theta U_{t-1}, \ \ t \in \mathbb{Z}, \tag{$\star$}$$

where $\theta \in \mathbb{R}$ et $(U_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is a weak white noise with variance σ^2.

1. Show that $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is stationary.
2. Compute the autocovariance function of $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

We will admit in the sequel that a stationary process with the same autocovariance function as $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is a MA(1) process admitting representation $(\star)$. Let us consider the random process $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ defined by

$$Y_t = 2Y_{t-1} + \varepsilon_t, \ t \in \mathbb{Z}$$

where $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is a weak white noise with variance $\frac{5}{18}$. We assume that $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is blurred by a systematic experimental noise: we observe

$$X_t = Y_t + \eta_t, \ \ t \in \mathbb{Z},$$

where $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is a weak white noise with variance $\frac{1}{6}$ and uncorrelated [3] with $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

3. Show that the process $(W_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ defined by

$$W_t = \varepsilon_t + \eta_t - 2\eta_{t-1}, \ t \in \mathbb{Z}$$

is a MA(1) process i.e. satisfies $(\star)$ for a set of values θ and σ^2 to be determined.

3. This means that $\mathbb{E}[\varepsilon_t\eta_t] = 0$ for every $t \in \mathbb{Z}$.

4. Derive that $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is a solution to an ARMA equation to be determined.

Exercise 3 (Constructing a stationary process)**.** Let U be a random variable on $\mathbb{T} = [-\pi,\pi)$ with law $\mathbb{P}_U$, and let Z be a square integrable, real-valued random variable, independent of U and centred. Set

$$X_t = Z\exp(itU), \quad t \in \mathbb{Z}.$$

1. Show that the process $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ with values in $\mathbb{C}$ is stationary and centred.
2. Show that the autocovariance function of $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$is given by

$$\gamma_X(h) = \mathbb{E}[Z^2]\int_{\mathbb{T}} e^{ih\omega}\mathbb{P}_U(d\omega), \quad h \in \mathbb{Z}.$$

3. Show that if the law $\mathbb{P}_U$ is symmetric [4], then γ_X is real-valued and even.
4. Show that if ξ is a random variable with values in $\mathbb{T} = [-\pi,\pi)$, then the characteristic function $\Phi_\xi(t) = \mathbb{E}[e^{it\xi}]$ of ξ defines for every $t \in \mathbb{Z}$ the autocovariance function of a stationary process with values in $\mathbb{C}$.

4. The law $\mathbb{P}_U$ is symmetric if, for every bounded $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, one has $\int_{\mathbb{T}} \varphi(\omega)\mathbb{P}_U(d\omega) = \int_{\mathbb{T}} \varphi(-\omega)\mathbb{P}_U(d\omega)$.

Examen final

Durée : 2 heures
Conditions : sans calculatrice ni documents
Il sera tenu grand compte de la présentation et de la rédaction

Exercice 1. Soient $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ deux processus liés par la relation suivante

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + X_t + \varepsilon_t,$$
$$X_t = \psi X_{t-1} + \eta_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

où $\varepsilon = (\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $\eta = (\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sont deux bruit blancs faibles décorrélés[1], de variance 1, et ϕ et ψ sont deux réels distincts dans $]0,1[$.

1. Montrer que X est bien défini et stationnaire.
2. Montrer que $W = (W_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini par

$$W_t = X_t + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

   est stationnaire.
3. En déduire que Y est bien défini et stationnaire.

On note B l'opérateur retard, défini par $BX_t = X_{t-1}$ pour $t \in \mathbb{Z}$.

4. Montrer que $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini par

$$Z_t = (1-\phi B)(1-\psi B)Y_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

   est stationnaire et calculer sa fonction d'autocovariance.
5. En déduire que Z est un processus MA(1), c'est-à-dire qu'il vérifie

$$Z_t = \zeta_t + \vartheta\,\zeta_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

   où $\zeta = (\zeta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance $\sigma^2 > 0$ et $\vartheta \in \mathbb{R}$.
6. En déduire que Y est un processus ARMA(p,q) dont on précisera les ordres p et q.
7. On suppose

$$\vartheta + \phi \neq 0 \ \text{ et } \ \vartheta + \psi \neq 0.$$

   Montrer sans calcul qu'il existe une représentation causale de Y.
8. Montrer que l'on a la décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{(1-\phi x)(1-\psi x)} = \frac{1}{\phi-\psi}\Big(\frac{\phi}{1-\phi x} - \frac{\psi}{1-\psi x}\Big).$$

9. En déduire la représentation causale

$$Y_t = \sum_{\ell\geq 0} a_\ell\,\zeta_{t-\ell}$$

   pour une suite $(a_\ell)_{\ell\in\mathbb{Z}}$ de $\ell^1(\mathbb{Z})$ que l'on explicitera.

1. C'est-à-dire pour tous $s,t \in \mathbb{Z}$, on a $\mathbb{E}[\varepsilon_t\eta_s] = 0$.

Exercice 2. Soit $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus vérifiant

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

où $\varepsilon = (\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc fort de variance $\sigma^2 > 0$ et $\phi \in]-1, 1[$.

1. Montrer que Y est bien défini.

Soit $\mu \in \mathbb{R}$. On pose

$$X_t = \mu + Y_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

2. Montrer que $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire. Calculer sa moyenne et sa fonction d'autocovariance en fonction de μ, σ^2 et ϕ.
3. Justifier l'existence de la densité spectrale f_X de X et l'exprimer avec σ^2 et ϕ.

Pour un entier $n \geq 1$, on observe (une réalisation) du vecteur aléatoire $(X_1, \ldots, X_n)$.

4. Montrer que l'estimateur $\widehat{\mu}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu$ en probabilité lorsque $n \to \infty$.
5. En notant $\mathcal{N}(0, v^2)$ la loi normale centrée de variance v^2, montrer que

$$\sqrt{n}\big(\widehat{\mu}_n - \mu\big) \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, v^2)$$

   lorsque $n \to \infty$, et expliciter v^2 en fonction de σ^2 et ϕ.
6. On suppose σ^2 et ϕ connus. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Construire un intervalle de confiance pour μ asymptotiquement de niveau $1 - \alpha$.
7. Pour quelle valeur limite de ϕ obtient-on l'intervalle de confiance ayant la plus grande précision ?
8. On ne suppose plus ϕ et σ^2 connus. Proposer la construction d'un intervalle de confiance pour μ asymptotiquement de niveau $1 - \alpha$.

English version

Exercise 1. Let $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ and $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ be two stochastic processes that satisfy

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + X_t + \varepsilon_t,$$
$$X_t = \psi X_{t-1} + \eta_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

where $\varepsilon = (\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ and $\eta = (\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ are two uncorrelated[2] weak white noises with unit variance, and ϕ and ψ are two distinct real numbers in $(0, 1)$.

1. Show that X is well-defined and stationary.
2. Show that $W = (W_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ defined by
$$W_t = X_t + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$
is stationary.
3. Derive that Y is well-defined and stationary.

We write B for the delay operator, defined by $BX_t = X_{t-1}$ for $t \in \mathbb{Z}$.

4. Show that $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ defined by
$$Z_t = (1 - \phi B)(1 - \psi B)Y_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$
is stationary and compute its autocovariance function.
5. Derive that Z is a MA(1) process, meaning that it can be written as
$$Z_t = \zeta_t + \vartheta\, \zeta_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z},$$
where $\zeta = (\zeta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is a white noise with variance $\sigma^2 > 0$ and $\vartheta \in \mathbb{R}$.
6. Derive that Y is a ARMA(p, q) process and identify its parameters p and q.
7. We assume that
$$\vartheta + \phi \neq 0 \ \text{ and } \ \vartheta + \psi \neq 0.$$
Prove (with no calculation) that there exists a causal representation for Y
8. Prove the decomposition
$$\frac{1}{(1 - \phi x)(1 - \psi x)} = \frac{1}{\phi - \psi}\Big(\frac{\phi}{1 - \phi x} - \frac{\psi}{1 - \psi x}\Big).$$
9. Derive the causal representation
$$Y_t = \sum_{\ell \geq 0} a_\ell\, \zeta_{t-\ell}$$
for a sequence $(a_\ell)_{\ell\in\mathbb{Z}}$ of $\ell^1(\mathbb{Z})$ to be determined.

Exercise 2. Let $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ be a stochastic process such that

$$Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

where $\varepsilon = (\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is a strong white noise with variance $\sigma^2 > 0$ and $\phi \in (-1, 1)$.

2. This means that for every $s, t \in \mathbb{Z}$, we have $\mathbb{E}[\varepsilon_t \eta_s] = 0$.

1. Show that Y is well-defined.

Let $\mu \in \mathbb{R}$ and
$$X_t = \mu + Y_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

2. Show that $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is stationary. Compute its mean and autocovariance function as a function of μ, σ^2 and ϕ.
3. Prove the existence of a spectral density f_X de X and express it with σ^2 and ϕ.

For an integer $n \geq 1$, one observes (a realisation) of the random vector $(X_1, \ldots, X_n)$.

4. Prove that the estimator $\widehat{\mu}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$ converges to μ in probability as $n \to \infty$.
5. Prove that
$$\sqrt{n}\big(\widehat{\mu}_n - \mu\big) \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, v^2)$$
as $n \to \infty$, where $\mathcal{N}(0, v^2)$ denotes the centred Gaussian law with variance v^2 and compute v^2 as a function of σ^2 and ϕ.
6. We assume that σ^2 and ϕ are known. Let $\alpha \in (0, 1)$. Build a confidence interval for μ that is asymptotically of confidence level $1 - \alpha$.
7. For which limiting value for ϕ do we have the best accuracy for this interval?
8. We do not assume ϕ nor σ^2 known anymore. Give a suggestion for constructing a confidence interval for μ that is asymptotically of confidence level $1 - \alpha$.

Examen partiel

Durée : 2 heures
Date : mercredi 20 novembre 2013
Conditions : sans calculatrice ni documents
Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Dans toute la suite, Z est un bruit blanc de moyenne 0 et de variance σ^2.

Exercice 1.

1. Qu'est-ce qu'un processus causal ? Donner une condition sur $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour que le processus linéaire $X_t = aZ_{t+1} + bZ_t + cZ_{t-1}$ soit causal ;
2. Calculer $(1-B)^{2014}X_t$ où B est l'opérateur retard et où $X_t = t^{2013} - 1 + Z_t$;
3. Si Z_t est de plus gaussienne pour tout $t \in \mathbb{Z}$, est-ce que $X_t = Z_t^2$ est du second ordre ? Stationnaire ?
4. Trouver une solution de l'équation ARMA$(1,1)$ $X_t = 2X_{t-1} + Z_t - Z_{t-1}$. Est-elle causale ? Inversible ? ;
5. Calculer la densité spectrale d'un MA(1).

Exercice 2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha_k = \lambda^k$ si $k \geq 0$ et $\alpha_k = 0$ si $k < 0$.

1. Si $|\lambda| < 1$, montrer que le processus $X_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k Z_{t-k}$ est bien défini ;
2. Calculer les fonctions moyenne et d'autocovariance du processus X de la question précédente. Ce processus est-il stationnaire ? Causal ? ;
3. Que se passe-t-il si $\lambda = 1$?

Exercice 3. Soit l'équation AR(∞) $X_t = Z_t - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k X_{t-k}$ où $0 < \lambda < 1$.

1. Écrire l'équation AR(∞) sous la forme $F_\alpha X = F_\beta Z$;
2. Trouver un processus linéaire solution de l'équation AR(∞).

Examen final

Durée : 2 heures
Date : jeudi 23 janvier 2014
Conditions : sans calculatrice ni documents
Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Exercice 1. Soit $Z \sim \mathrm{BB}(0, \sigma^2)$, et B l'opérateur retard.

1. Exprimer $Y_t = (1 - B)X_t$ en fonction de Z_t, où $X_t = t + 1 + Z_t$;
2. Le processus Y_t est-il stationnaire ? Préciser sa moyenne et son autocovariance ;
3. Soit $\alpha \in \ell^2(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k|^2 < \infty$. A-t-on $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$? (Justifier) ;
4. Montrer que si $\alpha \in \ell^2(\mathbb{Z})$, alors on peut définir $F_\alpha Z$ dans L^2.

Exercice 2. Soit Z un $\mathrm{BB}(0, \sigma^2)$.

1. On considère l'équation ARMA$(1, 1)$ $X_t = Z_t + 2Z_{t-1} + (1/2)X_{t-1}$. Trouver une solution stationnaire X. Est-elle unique ? Causale ? Inversible ?
2. Exprimer l'équation et sa solution X avec des filtres, et avec l'opérateur retard B ;
3. Exprimer l'autocovariance γ_X de X en fonction de α tel que $X = F_\alpha Z$;
4. Comment se comporte $\mathrm{Cov}(X_s, X_t)$ quand $|t - s| \to \infty$?
5. Calculer le prédicteur $\mathrm{proj}(X_2, H_{1,1})$, puis en déduire $\mathrm{proj}(X_t, H_{t-1,1})$, $t \in \mathbb{Z}$

Exercice 3. Soit $Z \sim$BB$(0, \sigma^2)$ et $\alpha, \beta \in]-1, 1[$, et B l'opérateur retard. Trouver une solution stationnaire de l'équation ARMA(∞, ∞) suivante : $\sum_{k=0}^\infty \alpha^k B^k X = \sum_{k=0}^\infty \beta^k B^k Z$.

Exercice 4. Soient A et B des v.a.r. indépendantes de moyenne 0 et de variance σ^2, et $\theta \in [-\pi, \pi]$ une constante. On considère le processus «harmonique» $X_t = A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t)$.

1. Montrer que X est stationnaire et calculer son autocovariance γ_X ;
2. Calculer la matrice de covariance Γ_n de $(X_1, \ldots, X_n)$ lorsque $\theta = \pi$;
3. Calculer la mesure spectrale de X. Préciser la densité spectrale si possible ;
4. Est-ce que $\gamma_X \in \ell^1(\mathbb{Z})$?
5. Tracer une trajectoire du processus $Y_t = A\cos(\theta t)$ en figurant $A(\omega)$ et θ ;

Exercice 5. Soit X un processus stationnaire réel de moyenne μ et d'autocovariance γ.

1. Donner la définition de la moyenne empirique $\overline{X}_n$;
2. Calculer le biais de $\overline{X}_n$ en fonction de μ et γ ;
3. Calculer l'écart quadratique moyen de $\overline{X}_n$ en fonction de μ et γ.
4. Que se passe-t-il lorsque $\lim_{h\to\infty} \gamma(h) = 0$?
5. Que se passe-t-il lorsque $\gamma \in \ell^1(\mathbb{Z})$?

Examen de rattrapage

Durée : 2 heures
Date : lundi 1er septembre 2014
Conditions : sans calculatrice ni documents
Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Dans toute la suite, Z est un bruit blanc de moyenne 0 et de variance σ^2.
Ce sujet reprend des éléments de l'examen partiel et de l'examen final de l'année.

Exercice 1.

1. Qu'est-ce qu'un processus causal ? Donner une condition sur $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour que le processus linéaire $X_t = aZ_{t+10} + bZ_t + cZ_{t-10}$ soit causal ;
2. Calculer $(B-1)^{2014}X_t$ où B est l'opérateur retard et où $X_t = t^{2013} - 1 + Z_t$;
3. Si Z_t est de plus gaussienne pour tout $t \in \mathbb{Z}$, est-ce que $X_t = Z_t^4$ est du second ordre ? Stationnaire ? Que se passe-t-il si Z est un bruit blanc fort ?
4. Trouver une solution de l'équation ARMA$(1,1)$ $2X_t = 4X_{t-1} + 2Z_t - 2Z_{t-1}$. Est-elle causale ? Inversible ? ;
5. Calculer la densité spectrale d'un MA(1).

Exercice 2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha_k = \lambda^k$ si $k \geq 0$ et $\alpha_k = 0$ si $k < 0$.

1. Si $|\lambda| < 1$, montrer que le processus $X_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k^2 Z_{t-k}$ est bien défini ;
2. Calculer les fonctions moyenne et d'autocovariance du processus X de la question précédente. Ce processus est-il stationnaire ? Causal ? ;
3. Que se passe-t-il si $\lambda = 1$?

Exercice 3. Soit l'équation AR(∞) $X_t = Z_t - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{2k} X_{t-k}$ où $0 < \lambda < 1$.

1. Écrire l'équation AR(∞) sous la forme $F_\alpha X = F_\beta Z$;
2. Trouver un processus linéaire solution de l'équation AR(∞).

Exercice 4. Soient A et B des v.a.r. indépendantes de moyenne 0 et de variance σ^2, et $\theta \in [-\pi, \pi]$ une constante. On considère le processus «harmonique» $X_t = A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t)$.

1. Montrer que X est stationnaire et calculer son autocovariance γ_X ;
2. Calculer la matrice de covariance Γ_n de $(X_1, \ldots, X_n)$ lorsque $\theta = \pi$;
3. Calculer la mesure spectrale de X. Préciser la densité spectrale si possible ;
4. Est-ce que $\gamma_X \in \ell^1(\mathbb{Z})$?
5. Tracer une trajectoire du processus $Y_t = A\cos(\theta t)$ en figurant $A(\omega)$ et θ ;

Exercice 5. Soit X un processus stationnaire réel de moyenne μ et d'autocovariance γ.

1. Donner la définition de la moyenne empirique $\overline{X}_n$;
2. Calculer le biais de $\overline{X}_n$ en fonction de μ et γ ;
3. Calculer l'écart quadratique moyen de $\overline{X}_n$ en fonction de μ et γ.
4. Que se passe-t-il lorsque $\lim_{h\to\infty} \gamma(h) = 0$?
5. Que se passe-t-il lorsque $\gamma \in \ell^1(\mathbb{Z})$?

Université Paris-Dauphine — M1 MA 2014/2015 — Séries Temporelles

Examen partiel

Durée : 2 heures
Date : mercredi 19 novembre 2014
Conditions : sans calculatrice ni documents
Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Version française

Exercice 1. Soit $(Z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ des v.a.r. i.i.d. de loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$, et a,b des réels.

1. Calculer le processus $\Delta_3 S_t$ où $S_t = \cos((2/3)\pi t) + Z_t$ et où $\Delta_3 = 1 - B^3$;
2. Est-ce que $(Z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc ? Justifier et préciser faible ou fort ;
3. Si $p \in \mathbb{N}$, est-ce que $(Z_k^p)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc ? Justifier et préciser faible ou fort, et calculer le cas échéant la moyenne et la fonction d'autocovariance du processus ;
4. Calculer la fonction d'autocovariance de $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ où $X_k = aZ_{k-1} + bZ_{k+1}$;
5. Dans quel cas $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est causal ? inversible ? (justifier).

Exercice 2.

1. Trouver une solution stationnaire de l'équation AR(1) $X_t = \varphi X_{t-1} + Z_t$ (ici $\varphi \in \mathbb{R}$) ;
2. Exprimer l'autocovariance et la densité spectrale de la solution quand $|\varphi| < 1$;
3. Résoudre l'équation ARMA$(1,1)$ suivante : $2X_t = X_{t-1} + 2Z_t + Z_{t-1}$;
4. Montrer qu'il existe $C > 0$ et $0 < \rho < 1$ tels que $|\gamma_X(h)| \leq C\rho^{|h|}$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$.
5. Soit Z un BruitBlanc$(0,\sigma^2)$, $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$, et $X_t = F_\alpha Z$. Est-ce que γ_X vérifie la propriété précédente de décroissance exponentielle ? (justifier).

English version

Exercise 1. Let $(Z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ be i.i.d. r.r.v. of normal law $\mathcal{N}(0,1)$, and let a, b be two reals.

1. Compute the process $\Delta_3 S_t$ where $S_t = \cos((2/3)\pi t) + Z_t$ and where $\Delta_3 = 1 - B^3$;
2. Is $(Z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ a white noise? Justify your answer and precise weak or strong;
3. If $p \in \mathbb{N}$, is $(Z_k^p)_{k\in\mathbb{Z}}$ a white noise ? Justify your answer, precise weak or strong, and compute if possible the mean and autocovariance;
4. Compute the autocovariance of $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ where $X_k = aZ_{k-1} + bZ_{k+1}$;
5. In which case $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ is causal? invertible? (justify your answers).

Exercise 2.

1. Find a stationary solution of the AR(1) equation $X_t = \varphi X_{t-1} + Z_t$ (here $\varphi \in \mathbb{R}$);
2. Express the autocovariance and the spectral density of the solution when $|\varphi| < 1$;
3. Solve the ARMA$(1,1)$ equation $2X_t = X_{t-1} + 2Z_t + Z_{t-1}$;
4. Show that there exists $C > 0$ and $0 < \rho < 1$ such that $|\gamma_X(h)| \le C\rho^{|h|}$ for all $h \in \mathbb{Z}$;
5. Let Z be a WhiteNoise$(0,\sigma^2)$, let $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$, and let $X_t = F_\alpha Z$. Does γ_X satisfies the exponential decay mentioned in the preceding question? (justify your answer).

Université Paris-Dauphine — M1 MA 2014/2015 — Séries Temporelles

Examen final

Durée : 2 heures
Date : vendredi 23 janvier 2015
Conditions : sans calculatrice ni documents
Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Exercice 1. On considère l'équation ARMA(p,q) $\Phi(B)X = \Theta(B)Z$ où les polynômes Φ et Θ s'écrivent $\Phi(z) = 1-\varphi_1 z - \cdots - \varphi_p z^p$ et $\Theta(z) = 1+\theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q$. Dans cet exercice, on admet tous les résultats du chapitre 2 sur le filtrage (il ne faut donc pas les démontrer).

1. Donner la démonstration du fait que si Φ ne s'annule pas sur le cercle unité, alors l'équation possède une unique solution stationnaire ;
2. Donner la démonstration du fait que si Φ ne s'annule pas sur le disque unité fermé, alors la solution stationnaire est causale ;
3. Donner la démonstration du fait que si Φ ne s'annule pas sur le cercle unité et si Θ ne s'annule pas sur le disque unité fermé alors la solution stationnaire est inversible ;
4. Donner la démonstration du fait que si Φ ne s'annule pas sur le cercle unité et si X est la solution stationnaire de l'équation alors X est également solution de l'équation ARMA(p',q') de polynômes Φ/Q et Θ/Q où Q est le PGCD des polynômes Φ et Θ. Préciser p', q'.

Exercice 2. On considère à présent l'équation ARMA(2,1) $X_t - X_{t-1} + \frac{1}{4}X_{t-2} = Z_t - \frac{1}{2}Z_{t-1}$.

1. Calculer une solution stationnaire X. Est-elle causale ? Inversible ? ;
2. Calculer l'autocovariance γ_X de X, puis $\mathrm{proj}(X_s, H_{t-1,1})$. Étudier le cas où $s \to \infty$;
3. Si Z est un BB fort gaussien, et si $\overline{X}_n$ désigne la moyenne empirique calculée avec $X_1, \ldots, X_n$, démontrer que $\sqrt{n}\overline{X}_n$ converge en loi vers une loi gaussienne dont on calculera la moyenne et la variance. Donner une application concrète.

Exercice 3. Soit X le processus linéaire solution de ARMA(p,q) $\Phi(B)X = \Theta(B)Z$ où Z est un bruit blanc centré de variance σ^2, et où Φ et Θ ne s'annulent pas sur le cercle unité. On numérote les racines $a_1, \ldots, a_p$ et $b_1, \ldots, b_q$ de Φ et de Θ de la manière suivante :

$$|a_1| \leq \cdots \leq |a_r| < 1 < |a_{r+1}| \leq \cdots \leq |a_p| \quad \text{et} \quad |b_1| \leq \cdots \leq |b_s| < 1 < |b_{s+1}| \leq \cdots \leq |b_q|$$

où $0 \leq r \leq p$ et $0 \leq s \leq q$. On pose $\sigma_*^2 = \sigma^2 \prod_{j=1}^r |a_j|^2 / \prod_{j=1}^s |b_j|^2$ et on considère un bruit blanc Z_* centré de variance σ_*^2. Soient Φ_* et Θ_* les polynômes définis par

$$\Phi_*(z) = \prod_{j=1}^r (1-\overline{a_j}z) \prod_{j=r+1}^p (1-a_j^{-1}z) \quad \text{et} \quad \Theta_*(z) = \prod_{j=1}^s (1-\overline{b_j}z) \prod_{j=s+1}^q (1-b_j^{-1}z).$$

1. Montrer que l'équation ARMA(p,q) $\Phi_*(B)X_* = \Theta_*(B)Z_*$ possède une unique solution stationnaire notée X_*, qui est causale et inversible ;
2. Montrer que X et X_* ont même mesure spectrale et même autocovariance.

English version

Exercise 1. Let us consider the ARMA(p,q) equation $\Phi(B)X = \Theta(B)Z$ where the polynomials Φ are Θ take the form $\Phi(z) = 1 - \varphi_1 z - \cdots - \varphi_p z^p$ and $\Theta(z) = 1 + \theta_1 z + \cdots + \theta_q z^q$. In this exercice, we admit all the results of chapter 2 on filtering (do not prove them here).

1. Give the proof of the fact that if Φ does not vanish on the unit circle then the equation admits a unique stationary solution;
2. Give the proof of the fact that if Φ does not vanish on the closed unit disc then the stationary solution is causal;
3. Give the proof of the fact that if Φ does not vanish on the unit circle and if Θ does not vanish on the closed unit disc then the stationary solution is invertible;
4. Give the proof of the fact that if Φ does not vanish on the unit circle and if X is the stationary solution then X is also the stationary solution of the ARMA(p', q') equation with polynomials Φ/Q and Θ/Q where Q is the GCD of Φ and Θ. Give p', q'.

Exercise 2. Let us consider the ARMA$(2,1)$ equation $X_t - X_{t-1} + \frac{1}{4}X_{t-2} = Z_t - \frac{1}{2}Z_{t-1}$.

1. Compute a stationary solution. Is it causal? Invertible?;
2. Compute the autocovariance γ_X of X, and then $\mathrm{proj}(X_s, H_{t-1,1})$ for $(s,t) = (2015, 1)$;
3. If Z is a strong Gaussian white noise, and if $\overline{X}_n$ denotes the empirical mean computed with $X_1, \ldots, X_n$, then prove that $\sqrt{n}\overline{X}_n$ converges in law to a Gaussian law and compute the mean and variance of the limit. Give a practical application.

Exercise 3. Let X ne the linear process solution of the ARMA(p,q) equation $\Phi(B)X = \Theta(B)Z$ where Z is a centered white noise of variance σ^2, and where Φ and Θ do not vanish on the unit circle. We label the roots $a_1, \ldots, a_p$ and $b_1, \ldots, b_q$ of Φ and Θ as follows:

$$|a_1| \leq \cdots \leq |a_r| < 1 < |a_{r+1}| \leq \cdots \leq |a_p| \quad \text{and} \quad |b_1| \leq \cdots \leq |b_s| < 1 < |b_{s+1}| \leq \cdots \leq |b_q|$$

where $0 \leq r \leq p$ and $0 \leq s \leq q$. Let us define $\sigma_*^2 = \sigma^2 \prod_{j=1}^r |a_j|^2 / \prod_{j=1}^s |b_j|^2$. We consider a centered white noise Z_* of variance σ_*^2. Let Φ_* and Θ_* be the polynomials defined by

$$\Phi_*(z) = \prod_{j=1}^r (1 - \overline{a_j} z) \prod_{j=r+1}^p (1 - a_j^{-1} z) \quad \text{and} \quad \Theta_*(z) = \prod_{j=1}^s (1 - \overline{b_j} z) \prod_{j=s+1}^q (1 - b_j^{-1} z).$$

1. Prove that the ARMA(p,q) equation $\Phi_*(B)X_* = \Theta_*(B)Z_*$ admits a unique stationary solution denote X_*, which is causal and invertible;
2. Prove that X and X_* have identical spectral measure and autocovariance.

Examen de rattrapage

Durée : 2 heures
Date : lundi 1er septembre 2015
Conditions : sans calculatrice ni documents
Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Ce sujet reprend des éléments des sujets et exercices de l'année.

Exercice 1 (ARMA$(1,1)$)**.** Soit l'équation $X_t - \phi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1}$, où ϕ et θ sont des réels, et où Z est un bruit blanc de moyenne 0 et de variance σ^2.

1. À quelles conditions sur ϕ et θ existe-t-il une solution (X_t) stationnaire ?
2. À quelles conditions cette solution est-elle causale ?

Dans la suite on supposera que ces conditions sont vérifiées.

3. Donner une représentation de la solution (X_t) sous la forme d'une somme infinie $\sum \psi_k Z_{t-k}$. On justifiera la convergence de cette somme, on précisera en quel sens elle converge et on donnera la valeur des coefficients $(\psi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.
4. Calculer la fonction d'autocorrélation de (X_t), et préciser le comportement de cette fonction à l'infini.

Exercice 2 (Estimation de la moyenne et intervalle de confiance pour un AR(1))**.** Soit Z un bruit blanc fort gaussien de moyenne 0 et de variance σ^2. Soit

$$Y_t = \theta + X_t,$$

où (X_t) est un AR(1) défini par $X_t - \phi X_{t-1} = Z_t$, où $|\phi| < 1$. On cherche à estimer θ à partir de $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$. On note $\widehat{\theta}_n$ la moyenne empirique de $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ définie par

$$\widehat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} Y_i.$$

1. Calculer $\lim_{n\to\infty} n\mathrm{Var}(\widehat{\theta}_n)$ et donner l'expression de γ défini par
$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,\gamma).$$
2. Lorsque $\phi = 0.6$, $\sigma^2 = 2$, et $n = 200$, on obtient $\widehat{\theta}_n = 0.1$. Construire un intervalle de confiance asymptotique à 95% pour θ. Peut-on dire que $\theta = 0$?
3. Soit Γ_n la matrice de covariance du vecteur aléatoire $Y^{(n)} = (Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1})^\top$. Montrer que Γ_n est inversible ;
4. On propose un autre estimateur de θ défini par
$$\widetilde{\theta}_n = (\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1}\mathbf{1}_n)^{-1}\mathbf{1}_n^\top\Gamma_n^{-1}Y^{(n)} \quad \text{où} \quad \mathbf{1}_n := (1,\ldots,1)^\top.$$
Monter que $\widetilde{\theta}_n$ est l'estimateur des moindres carrés $\min_\theta \|\theta\Gamma_n^{-1/2}\mathbf{1}_n - \Gamma_n^{-1/2}Y^{(n)}\|$;
5. Montrer que $\mathbb{E}(\widetilde{\theta}_n) = \theta$ et
$$\mathrm{Var}(\widetilde{\theta}_n) = \frac{1}{\mathbf{1}_n\Gamma_n^{-1}\mathbf{1}_n};$$
6. En utilisant la décomposition de Cholesky
$$\Gamma_n^{-1} = \Phi_n^\top \mathrm{Diag}\left(\frac{\sigma^2}{1-\phi^2}, \sigma^2, \ldots, \sigma^2\right)^{-1}\Phi_n \quad \text{où} \quad \Phi_n(i,j) := \mathbf{1}_{i=j} - \phi\mathbf{1}_{i=j+1},$$
montrer que $\widetilde{\theta}_n$ et $\widehat{\theta}_n$ ont asymptotiquement la même variance.

English version

Exercise 1 (ARMA$(1,1)$)**.** Let us consider the equation $X_t - \phi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1}$, where ϕ and θ are reals, and where Z is a white noise of mean 0 and variance σ^2.

1. Under which conditions on ϕ and θ there exists a stationary solution (X_t)?
2. Under which condition this stationary solution is causal?

In the sequel we suppose that these condition are satisfied.

3. Give a representation of the the solution (X_t) as a series of the form $\sum \psi_k Z_{t-k}$. Discuss the convergence of the series and the nature of the convergence. Give the value of the coefficients $(\psi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.
4. Compute the autocorrelation function (X_t). How it behaves at infinity?

Exercise 2 (Estimation of the mean and confidence interval for an AR(1))**.** Let Z be a strong Gaussian white noise with mean 0 and variance σ^2. Let

$$Y_t = \theta + X_t,$$

where (X_t) is an AR(1) process solution of $X_t - \phi X_{t-1} = Z_t$, where $|\phi| < 1$. We would like to estimate θ with $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$. Let $\widehat{\theta}_n$ be the empirical mean of $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$, namely

$$\widehat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} Y_i.$$

1. Compute $\lim_{n\to\infty} n\mathrm{Var}(\widehat{\theta}_n)$ and provide the expression of γ defined by
$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{law}} \mathcal{N}(0,\gamma).$$
2. When $\phi = 0.6$, $\sigma^2 = 2$, and $n = 200$, we get $\widehat{\theta}_n = 0.1$. Construct a 95% asymptotic confidence interval for θ. Can we say that $\theta = 0$?
3. Show that the covariance matrix Γ_n of $Y^{(n)} = (Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1})^\top$ is invertible;
4. We consider now another estimator of θ defined by
$$\widetilde{\theta}_n = (\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1}\mathbf{1}_n)^{-1}\mathbf{1}_n^\top\Gamma_n^{-1}Y^{(n)} \quad \text{où} \quad \mathbf{1}_n := (1,\ldots,1)^\top.$$
Show that $\widetilde{\theta}_n$ is the least square estimator $\min_\theta \|\theta\Gamma_n^{-1/2}\mathbf{1}_n - \Gamma_n^{-1/2}Y^{(n)}\|$;
5. Show that $\mathbb{E}(\widetilde{\theta}_n) = 0$ and
$$\mathrm{Var}(\widetilde{\theta}_n) = \frac{1}{\mathbf{1}_n\Gamma_n^{-1}\mathbf{1}_n};$$
6. By using the Cholesky decomposition
$$\Gamma_n^{-1} = \Phi_n^\top \mathrm{Diag}\left(\frac{\sigma^2}{1-\phi^2}, \sigma^2, \ldots, \sigma^2\right)^{-1}\Phi_n \quad \text{where} \quad \Phi_n(i,j) := \mathbf{1}_{i=j} - \phi\mathbf{1}_{i=j+1},$$
show that $\widetilde{\theta}_n$ et $\widehat{\theta}_n$ have asymptotically the same variance.

Examen partiel

Durée : 2 heures
Date : mercredi 4 novembre 2015 8h30-10h30
Conditions : sans calculatrice ni documents
Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Dans toute la suite, Z est un bruit blanc de moyenne 0 et de variance σ^2.

Exercice 1.

1. Soit $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et $X = F_\alpha Z$. À quelle condition le processus X est causal ? Inversible ? À la fois causal et inversible ? ;
2. Calculer $\Delta^2 X_t$ où $\Delta = 1 - B$ est l'opérateur différence et où $X_t = 1 + t + Z_t$;
3. Montrer que si $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sont des processus stationnaires indépendants alors le processus produit $(X_tY_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire. Calculer son autocovariance ;
4. Montrer que l'autocovariance d'un processus MA(1) est la transformée de Fourier d'une mesure positive finie sur $[-\pi, \pi]$ qu'on calculera.

Exercice 2. Soit l'équation $X_t - \phi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1}$, où ϕ et θ sont des réels.

1. À quelles conditions sur ϕ et θ existe-t-il une solution $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ stationnaire ?
2. À quelles conditions cette solution est-elle causale ?

Dans la suite on supposera que ces conditions sont vérifiées.

3. Donner une représentation de la solution $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sous la forme d'une somme infinie $\sum \psi_k Z_{t-k}$. On justifiera la convergence de cette somme, on précisera en quel sens elle converge et on donnera la valeur des coefficients $(\psi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$;
4. Calculer l'autocovariance de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, et donner son comportement à l'infini.

Exercice 3.

1. Démontrer que lorsque Z est gaussien alors pour tous $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et $t \in \mathbb{Z}$, la v.a.r. $(F_\alpha Z)_t$ est gaussienne, et calculer sa moyenne et sa variance ;
2. Démontrer que lorsque les v.a.r. $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sont i.i.d. et dans L^4 alors pour tous $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et $t \in \mathbb{Z}$, la v.a.r. $(F_\alpha Z)_t$ possède un moment d'ordre 4 qu'on calculera.

English version

In the whole text, $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is a white noise of zero mean and variance σ^2.

Exercise 1.

1. Let $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ and $X = F_\alpha Z$. Under which condition the process X is causal ? Invertible ? Both causal and invertible ?;
2. Compute $\Delta^2 X_t$ where $\Delta = 1 - B$ is the difference operator and where $X_t = 1 + t + Z_t$;
3. Show that if $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ and $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ are independent stationary processes then the product process $(X_t Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is also stationary and compute its autocovariance;
4. Show that the autocovariance of an MA(1) process is the Fourier transform of a finite positive measure on $[-\pi, \pi]$, and compute this measure.

Exercise 2. We consider the equation $X_t - \phi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1}$, where ϕ and θ are reals.

1. Under which condition on ϕ and θ there exists a stationary solution $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$?
2. Under which condition this solution is causal?

In the sequel we assume that these conditions are satisfied.

3. Give a representation of the solution $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ in terms of a series $\sum \psi_k Z_{t-k}$. Justify the convergence of the series, and make precise the notion of convergence and the value of the coefficients $(\psi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$;
4. Compute the autocovariance of $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, and give its behavior at infinity.

Exercise 3.

1. Show that when Z is gaussian then for any $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ and $t \in \mathbb{Z}$, the r.r.v. $(F_\alpha Z)_t$ is gaussian, and compute its mean and variance;
2. Show that when the r.r.v. $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ are i.i.d. and in L^4 then for all $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ and $t \in \mathbb{Z}$, the r.r.v. $(F_\alpha Z)_t$ admits a finite moment of order 4 and compute it.

Examen final

Durée : 2 heures
Date : lundi 11 janvier 2016
Conditions : sans calculatrice ni documents
Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Exercice 1 (Sport)**.** Soit Z un bruit blanc de moyenne 0 et de variance $\sigma^2 > 0$.

1. Soient θ et φ des réels fixés tels que $|\varphi| = 1$ et $\varphi + \theta \neq 0$. Démontrer que l'équation $\mathrm{ARMA}(1,1)$ $X_t - \varphi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1}$ n'a pas de solution stationnaire ;
2. Soient θ et φ des réels fixés dans l'intervalle $]-1,1[$. Démontrer que la solution stationnaire de l'équation $\mathrm{ARMA}(1,1)$ $X_t - \varphi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1}$ est aussi solution de l'équation $\mathrm{ARMA}(\infty,\infty)$ $X_t + \sum_{k=1}^\infty (-\theta)^k X_{t-k} = Z_t + \sum_{k=1}^\infty \varphi^k Z_{t-k}$;
3. Calculer une solution stationnaire de l'équation $\mathrm{ARMA}(2,1)$ $X_t = \frac{1}{4} X_{t-2} + Z_t + \frac{1}{2} Z_{t-1}$; Est-elle unique ? Causale ? Inversible ? Construire des solutions non stationnaires ;
4. Démontrer que si $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus stationnaire $\mathrm{ARMA}(p,q)$ dont le polynôme Φ ne s'annule pas sur le disque unité fermé alors il existe des constantes $C, c > 0$ telles que $|\gamma_X(h)| \leq C e^{-c|h|}$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$;
5. Démontrer que pour toute variable aléatoire réelle Y de moyenne 0 et de variance 1, le processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini par $X_t = Y$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$ est stationnaire et vérifie $\underline{\lim}_{|h|\to\infty} |\gamma_X(h)| > 0$, puis préciser si X est solution d'une équation ARMA ;
6. Démontrer que si X est un processus stationnaire avec $\gamma_X \in \ell^1(\mathbb{Z})$ alors la quantité $n\mathrm{Var}(\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n))$ converge quand $n \to \infty$ vers une valeur et la préciser.

Exercice 2 (Autocorrélation partielle)**.** Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus stationnaire de moyenne 0 et d'autocovariance γ_X avec $\gamma_X(0) > 0$. On pose, pour tous $t \in \mathbb{Z}$ et $p \geq 0$,

$$\begin{aligned} H_{t-1,p} &:= \mathrm{vect}\{X_{t-1}, \ldots, X_{t-p}\} \\ E^+_{t,p} &:= X_t - \mathrm{proj}(X_t, H_{t-1,p}) \\ E^-_{t-(p+1),p} &:= X_{t-(p+1)} - \mathrm{proj}(X_{t-(p+1)}, H_{t-1,p}). \end{aligned}$$

1. Démontrer que

$$\mathrm{proj}(X_t, H_{t-1,p+1}) = \mathrm{proj}(X_t, H_{t-1,p}) + \kappa_{p+1} E^-_{t-(p+1),p} \quad \text{où} \quad \kappa_{p+1} := \frac{\left\langle X_t \,,\, E^-_{t-(p+1),p} \right\rangle}{\left\| E^-_{t-(p+1),p} \right\|_2^2};$$

2. Démontrer que

$$\kappa_{p+1} = \frac{\left\langle E^+_{t,p}, E^-_{t-(p+1),p} \right\rangle}{\left\| E^+_{t,p} \right\|_2 \left\| E^-_{t-(p+1),p} \right\|_2} \in [-1,1].$$

Exercice 3 (Processus stationnaires vectoriels)**.** Soit $d \geq 1$ un entier et $\sigma^2 > 0$ un réel. Pour tout $t \in \mathbb{Z}$, soit $Z_t = (Z_{t,1}, \ldots, Z_{t,d})^\top$ un vecteur aléatoire centré de $\mathbb{R}^d$. On suppose que pour tous $s,t \in \mathbb{Z}$ et tous $j,k \in \{1,\ldots,d\}$ on a $\mathbb{E}(Z_{s,j} Z_{t,k}) = \sigma^2 \mathbf{1}_{s=t, j=k}$.

1. Soit $\Phi \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice carrée telle que $\|\Phi\|_{2\to 2} := \max_{x\in\mathbb{R}^d : \|x\|_2 = 1} \|\Phi x\|_2 < 1$. Construire un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ à valeurs vectorielles solution de l'équation $\mathrm{AR}(1)$ vectorielle $X_t = \Phi X_{t-1} + Z_t$, $t \in \mathbb{Z}$. Démontrer qu'il est unique en un sens à définir ;
2. Soit X le processus obtenu dans la question précédente. Supposons que Φ est diagonale. Donner une condition suffisante sur Z pour que les processus marginaux $(X_{t,1})_{t\in\mathbb{Z}}, \ldots, (X_{t,d})_{t\in\mathbb{Z}}$ soient indépendants (justifier la réponse).

English version

Exercise 1 (Sport)**.** Let Z be a white noise of mean 0 and variance $\sigma^2 > 0$.

1. Let θ and φ be fixed reals such that $|\varphi| = 1$ and $\varphi+\theta \neq 0$. Prove that the ARMA$(1,1)$ equation $X_t - \varphi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1}$ does not have a stationary solution;
2. Let θ and φ be fixed reals in the interval $]-1,1[$. Prove that the stationary solution of the ARMA$(1,1)$ equation $X_t - \varphi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1}$ is also solution of the ARMA(∞,∞) equation $X_t + \sum_{k=1}^{\infty}(-\theta)^k X_{t-k} = Z_t + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^k Z_{t-k}$;
3. Compute a stationary solution of the ARMA$(2,1)$ equation $X_t = \frac{1}{4}X_{t-2} + Z_t + \frac{1}{2}Z_{t-1}$; Is it unique ? Causal ? Invertible ? Construct non stationary solutions;
4. Prove that if $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ is an ARMA(p,q) stationary process with a polynomial Φ which does not vanish on the closed unit disc, then there exist constants $C, c > 0$ such that $|\gamma_X(h)| \leq Ce^{-c|h|}$ for any $h \in \mathbb{Z}$;
5. Prove that for any real random variable Y of mean 0 and variance 1, the process $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ defined by $X_t = Y$ for any $t \in \mathbb{Z}$ is stationary and satisfies $\underline{\lim}_{|h|\to\infty} |\gamma_X(h)| > 0$, and specify if it solves an ARMA equation;
6. Prove that if X is a stationary process with $\gamma_X \in \ell^1(\mathbb{Z})$ then $n\mathrm{Var}(\frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n))$ converges as $n \to \infty$ to some value and specify this value.

Exercise 2 (Partial autocorrelation)**.** Let $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ be a stationary process of mean 0 and autocovariance γ_X with $\gamma_X(0) > 0$. We set, for any $t \in \mathbb{Z}$ and $p \geq 0$,

$$\begin{aligned} H_{t-1,p} &:= \mathrm{vect}\{X_{t-1}, \ldots, X_{t-p}\} \\ E^+_{t,p} &:= X_t - \mathrm{proj}(X_t, H_{t-1,p}) \\ E^-_{t-(p+1),p} &:= X_{t-(p+1)} - \mathrm{proj}(X_{t-(p+1)}, H_{t-1,p}). \end{aligned}$$

1. Prove that

$$\mathrm{proj}(X_t, H_{t-1,p+1}) = \mathrm{proj}(X_t, H_{t-1,p}) + \kappa_{p+1} E^-_{t-(p+1),p} \quad \text{where} \quad \kappa_{p+1} := \frac{\left\langle X_t\, ,\, E^-_{t-(p+1),p}\right\rangle}{\left\|E^-_{t-(p+1),p}\right\|_2^2};$$

2. Prove that

$$\kappa_{p+1} = \frac{\left\langle E^+_{t,p}, E^-_{t-(p+1),p}\right\rangle}{\left\|E^+_{t,p}\right\|_2 \left\|E^-_{t-(p+1),p}\right\|_2} \in [-1,1].$$

Exercise 3 (Multivariate stationary processes)**.** Let $d \geq 1$ be an integer and $\sigma^2 > 0$ be a real. For any $t \in \mathbb{Z}$, let $Z_t = (Z_{t,1}, \ldots, Z_{t,d})^\top$ be a centered random vector of $\mathbb{R}^d$. We suppose that for any $s, t \in \mathbb{Z}$ and any $j, k \in \{1, \ldots, d\}$ we have $\mathbb{E}(Z_{s,j} Z_{t,k}) = \sigma^2 \mathbf{1}_{s=t, j=k}$.

1. Let $\Phi \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ be a square matrix such that $\|\Phi\|_{2\to 2} := \max_{x\in\mathbb{R}^d : \|x\|_2 = 1} \|\Phi x\|_2 < 1$. Construct a vector valued process $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ solution of the vectorial AR(1) equation $X_t = \Phi X_{t-1} + Z_t$, $t \in \mathbb{Z}$. Prove that it is unique in some sense;
2. Let X be as before. Suppose that Φ is diagonal. Give a sufficient condition on Z in order to make the marginal processes $(X_{t,1})_{t\in\mathbb{Z}}, \ldots, (X_{t,d})_{t\in\mathbb{Z}}$ independent (justify).

Examen de rattrapage

Durée : 2 heures
Date : vendredi 15 juillet 2016
Conditions : sans calculatrice ni documents
Note :

— Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction
— Les surveillants ne répondront à aucune question sur le sujet
— Si vous avez des commentaires à faire, faites le sur votre copie
— Ce sujet reprend des éléments des sujets des années antérieures

Exercice 1. Soit $(Z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ des v.a.r. i.i.d. de loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$, et a, b des réels.

1. Calculer le processus $\Delta_3 S_t$ où $S_t = \cos((2/3)\pi t) + Z_t$ et où $\Delta_3 = 1 - B^3$;
2. Est-ce que $(Z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc ? Justifier et préciser faible ou fort ;
3. Si $p \in \mathbb{N}$, est-ce que $(Z_k^p)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc ? Justifier et préciser faible ou fort, et calculer le cas échéant la moyenne et la fonction d'autocovariance du processus ;
4. Calculer la fonction d'autocovariance de $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ où $X_k = aZ_{k-1} + bZ_{k+1}$;
5. Dans quel cas $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est causal ? inversible ? (justifier).

Exercice 2.

1. Trouver une solution stationnaire de l'équation AR(1) $X_t = \varphi X_{t-1} + Z_t$ (ici $\varphi \in \mathbb{R}$) ;
2. Exprimer l'autocovariance et la densité spectrale de la solution quand $|\varphi| < 1$;
3. Résoudre l'équation ARMA$(1,1)$ suivante : $2X_t = X_{t-1} + 2Z_t + Z_{t-1}$;
4. Montrer qu'il existe $C > 0$ et $0 < \rho < 1$ tels que $|\gamma_X(h)| \le C\rho^{|h|}$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$.
5. Soit Z un BruitBlanc$(0,\sigma^2)$, $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$, et $X_t = F_\alpha Z$. Est-ce que γ_X vérifie la propriété précédente de décroissance exponentielle ? (justifier).

Exercice 3. On considère l'équation ARMA(2,1) $X_t - X_{t-1} + \frac{1}{4}X_{t-2} = Z_t - \frac{1}{2}Z_{t-1}$.

1. Calculer une solution stationnaire X. Est-elle causale ? Inversible ? ;
2. Calculer l'autocovariance γ_X de X, puis $\mathrm{proj}(X_s, H_{t-1,1})$. Étudier le cas où $s \to \infty$;
3. Si Z est un BB fort gaussien, et si $\overline{X}_n$ désigne la moyenne empirique calculée avec $X_1, \ldots, X_n$, démontrer que $\sqrt{n}\overline{X}_n$ converge en loi vers une loi gaussienne dont on calculera la moyenne et la variance. Donner une application concrète.

Exercice 4. Soit X le processus linéaire solution de ARMA(p,q) $\Phi(B)X = \Theta(B)Z$ où Z est un bruit blanc centré de variance σ^2, et où Φ et Θ ne s'annulent pas sur le cercle unité. On numérote les racines $a_1, \ldots, a_p$ et $b_1, \ldots, b_q$ de Φ et de Θ de la manière suivante :

$$|a_1| \le \cdots \le |a_r| < 1 < |a_{r+1}| \le \cdots \le |a_p| \quad \text{et} \quad |b_1| \le \cdots \le |b_s| < 1 < |b_{s+1}| \le \cdots \le |b_q|$$

où $0 \le r \le p$ et $0 \le s \le q$. On pose $\sigma_*^2 = \sigma^2 \prod_{j=1}^r |a_j|^2 / \prod_{j=1}^s |b_j|^2$ et on considère un bruit blanc Z_* centré de variance σ_*^2. Soient Φ_* et Θ_* les polynômes définis par

$$\Phi_*(z) = \prod_{j=1}^{r}(1 - \overline{a_j}z) \prod_{j=r+1}^{p}(1 - a_j^{-1}z) \quad \text{et} \quad \Theta_*(z) = \prod_{j=1}^{s}(1 - \overline{b_j}z) \prod_{j=s+1}^{q}(1 - b_j^{-1}z).$$

1. Montrer que l'équation ARMA(p,q) $\Phi_*(B)X_* = \Theta_*(B)Z_*$ possède une unique solution stationnaire notée X_*, qui est causale et inversible ;
2. Montrer que X et X_* ont même mesure spectrale et même autocovariance.

English version

Exercise 1. Let $(Z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ be i.i.d. r.r.v. of normal law $\mathcal{N}(0,1)$, and let a,b be two reals.

1. Compute the process $\Delta_3 S_t$ where $S_t = \cos((2/3)\pi t) + Z_t$ and where $\Delta_3 = 1 - B^3$;
2. Is $(Z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ a white noise? Justify your answer and precise weak or strong;
3. If $p \in \mathbb{N}$, is $(Z_k^p)_{k\in\mathbb{Z}}$ a white noise ? Justify your answer, precise weak or strong, and compute if possible the mean and autocovariance;
4. Compute the autocovariance of $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ where $X_k = aZ_{k-1} + bZ_{k+1}$;
5. In which case $(X_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ is causal? invertible? (justify your answers).

Exercise 2.

1. Find a stationary solution of the AR(1) equation $X_t = \varphi X_{t-1} + Z_t$ (here $\varphi \in \mathbb{R}$);
2. Express the autocovariance and the spectral density of the solution when $|\varphi| < 1$;
3. Solve the ARMA$(1,1)$ equation $2X_t = X_{t-1} + 2Z_t + Z_{t-1}$;
4. Show that there exists $C > 0$ and $0 < \rho < 1$ such that $|\gamma_X(h)| \le C\rho^{|h|}$ for all $h \in \mathbb{Z}$;
5. Let Z be a WhiteNoise$(0,\sigma^2)$, let $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$, and let $X_t = F_\alpha Z$. Does γ_X satisfies the exponential decay mentioned in the preceding question? (justify your answer).

Exercise 3. Let us consider the ARMA$(2,1)$ equation $X_t - X_{t-1} + \frac{1}{4}X_{t-2} = Z_t - \frac{1}{2}Z_{t-1}$.

1. Compute a stationary solution. Is it causal? Invertible?;
2. Compute the autocovariance γ_X of X, and then $\mathrm{proj}(X_s, H_{t-1,1})$ for $(s,t) = (2015, 1)$;
3. If Z is a strong Gaussian white noise, and if $\overline{X}_n$ denotes the empirical mean computed with $X_1, \ldots, X_n$, then prove that $\sqrt{n}\overline{X}_n$ converges in law to a Gaussian law and compute the mean and variance of the limit. Give a practical application.

Exercise 4. Let X ne the linear process solution of the ARMA(p,q) equation $\Phi(B)X = \Theta(B)Z$ where Z is a centered white noise of variance σ^2, and where Φ and Θ do not vanish on the unit circle. We label the roots $a_1,\ldots,a_p$ and $b_1,\ldots,b_q$ of Φ and Θ as follows:

$$|a_1| \le \cdots \le |a_r| < 1 < |a_{r+1}| \le \cdots \le |a_p| \quad \text{and} \quad |b_1| \le \cdots \le |b_s| < 1 < |b_{s+1}| \le \cdots \le |b_q|$$

where $0 \le r \le p$ and $0 \le s \le q$. Let us define $\sigma_*^2 = \sigma^2 \prod_{j=1}^r |a_j|^2 / \prod_{j=1}^s |b_j|^2$. We consider a centered white noise Z_* of variance σ_*^2. Let Φ_* and Θ_* be the polynomials defined by

$$\Phi_*(z) = \prod_{j=1}^{r}(1-\overline{a_j}z)\prod_{j=r+1}^{p}(1-a_j^{-1}z) \quad \text{and} \quad \Theta_*(z) = \prod_{j=1}^{s}(1-\overline{b_j}z)\prod_{j=s+1}^{q}(1-b_j^{-1}z).$$

1. Prove that the ARMA(p,q) equation $\Phi_*(B)X_* = \Theta_*(B)Z_*$ admits a unique stationary solution denote X_*, which is causal and invertible;
2. Prove that X and X_* have identical spectral measure and autocovariance.

Mathématiques et Informatique de la Décision et des Organisations

Introduction aux séries temporelles

Master 1 Mathématiques Appliquées

Correction succincte des sujets d'examens

Année 2015/2016

Quartier d'affaires de la Défense et bois de Boulogne
Vus du bureau B518-bis de l'Université Paris-Dauphine

Version électronique composée avec LaTeX le 15 juillet 2016

— Auteurs des sujets et corrigés :
  — Djalil Chafaï (enseignant Paris-Dauphine, 2013–)
  — Marc Hoffmann (enseignant Paris-Dauphine, 2012–2013)

Université Paris-Dauphine — M1 MA 2012/2013 — Séries Temporelles

Examen partiel

Durée : 2 heures

Conditions : sans calculatrice ni documents

Solution succincte de l'exercice 1.

1. On a, par indépendance
$$\gamma_\varepsilon(h) = \mathbb{E}[U^2\xi_t\xi_{t+h}] = \mathbb{E}[U^2]\mathbb{E}[\xi_t\xi_{t+h}] = \rho^2\sigma^2\mathbf{1}_{h=0}.$$
2. Si U est p.s. égale à une constante, alors les ε_t sont i.i.d. et ε est un BB fort. Sinon,
$$\mathbb{E}[\varepsilon_0^2\varepsilon_1^2] = \mathbb{E}[U^4]\mathbb{E}[\varepsilon_0^2]^2 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[\varepsilon_0^2]\mathbb{E}[\varepsilon_1^2] = \mathbb{E}[U^2]^2\mathbb{E}[\varepsilon_0^2]^2 \neq \mathbb{E}[U^4]\mathbb{E}[\varepsilon_0^2]^2$$
sauf si U est p.s. égale à une constante (Schwarz). Donc ε n'est pas un BB fort.
3. On a $\psi \in \ell^1(\mathbb{Z})$. On applique le théorème de filtrage.
4. On applique le théorème de filtrage.
5. Le processus X est stationnaire par le théorème de filtrage. Il est centré car ε est centré. De plus (formule du cours)
$$\gamma_X(h) = \sigma^2\gamma^2\sum_{k\in\mathbb{Z}}\psi_k\psi_{k+h}.$$
Pour $h \geq 0$, cette dernière quantité est égale à
$$\sigma^2\gamma^2\sum_{k\geq 1}\frac{1}{2^k}\frac{1}{2^{k+h}} = \tfrac{1}{3}\sigma^2\gamma^2 2^{-h}.$$

Solution succincte de l'exercice 2.

1. C'est une conséquence immédiate du théorème de filtrage.
2. On a
$$\gamma_Z(h) = \mathrm{Cov}(U_t + \theta U_{t-1}, U_{t+h} + \theta U_{t+h-1}) = \begin{cases} \sigma^2(1+\theta^2) & \text{si } h = 0 \\ \theta\sigma^2 & \text{si } |h| = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
3. Le processus W est stationnaire comme somme de processus stationnaires décorrélés (ϵ qui est un bruit blanc faible d'une part et $\eta - 2B\eta$ qui est un MA(1), où l'on a noté B l'opérateur de retard). De plus
$$\gamma_W(0) = \tfrac{10}{9}, \quad \gamma_W(1) = \gamma_W(-1) = -\tfrac{1}{3} \ \text{ et } \ \gamma_W(h) = 0 \ \text{ pour } \ |h| \geq 2.$$
Donc W est un processus stationnaire, ayant même fonction d'autocovariance qu'un MA(1). C'est un MA(1) d'après la question 1, et il peut s'écrire $W_t = U_t + \theta U_{t-1}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ et U un bruit blanc de variance σ^2, à condition d'avoir
$$\tfrac{10}{9} = (1+\theta^2)\sigma^2 \ \text{ et } \ \theta\sigma^2 = \tfrac{1}{3}.$$
4. On a
$$\begin{aligned} X_t = Y_t + \eta_t &= 2Y_{t-1} + \varepsilon_t + \eta_t \\ &= 2Y_{t-1} + 2\eta_{t-1} + \big(\varepsilon_t + \eta_t - 2\eta_{t-1}\big) \\ &= 2Y_{t-1} + 2\eta_{t-1} + W_t \\ &= 2X_{t-1} + W_t. \end{aligned}$$
Donc $X_t - 2X_{t-1} = U_t + \theta U_{t-1}$ et on a bien la décomposition recherchée.

Solution succincte de l'exercice 3.

1. X est borné donc de carré intégrable. De plus
$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[Ze^{itU}] = \mathbb{E}[Z]\mathbb{E}[e^{it_U}] = 0$$
puisque Z et U sont indépendantes et Z est centré. Pour la stationnarité, puisque X est centré, il suffit de montrer que $\mathbb{E}[X_{t+h}\overline{X_t}]$ ne dépend pas de t. On a
$$\mathbb{E}[X_{t+h}\overline{X_t}] = \mathbb{E}\big[Z^2 e^{i(t+h)U} e^{-itU}\big] = \mathbb{E}[Z^2 e^{ihU}].$$
2. On a, d'après la question précédente
$$\gamma_X(h) = \mathbb{E}[X_{t+h}\overline{X_t}] = \mathbb{E}[Z^2]\mathbb{E}[e^{ihU}] = \mathbb{E}[Z^2]\int_{\mathbb{T}} e^{ih\omega}\mathbb{P}_U(d\omega).$$
3. On a
$$\overline{\gamma(h)} = \mathbb{E}[Z^2]\overline{\int_{\mathbb{T}} e^{ih\omega}\mathbb{P}_U(d\omega)} = \int_{\mathbb{T}} e^{-ih\omega}\mathbb{P}_U(d\omega) = \int_{\mathbb{T}} e^{ih\omega}\mathbb{P}_U(d\omega) = \gamma(h),$$
donc γ est réelle. On a de même $\gamma(h) = \gamma(-h)$.
4. Soit Z une v.a.r. centrée telle que $\mathbb{E}[Z^2] = 1$, indépendantes de ξ. D'après ce qui précède, le processus $X_t = Ze^{i\xi_t}$ a pour fonction de covariance $h \rightsquigarrow \Phi_\xi(h)$.

Examen final

Durée : 2 heures
Conditions : sans calculatrice ni documents
Il sera tenu grand compte de la présentation et de la rédaction

Solution succincte de l'exercice 1.

1. Le processus X est un $\mathrm{AR}(1)$ bien défini et stationnaire car $|\phi| \neq 1$;
2. Pour tous $t, h \in \mathbb{Z}$ on a
$$\mathbb{E}(W_t) = \mathbb{E}(X_t) + \mathbb{E}(\epsilon_t) = 0$$
et
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W_t W_{t+h}) &= \mathbb{E}(X_t X_{t+h}) + \mathbb{E}(\epsilon_t \epsilon_{t+h}) + \mathbb{E}(X_t \epsilon_{t+h}) + \mathbb{E}(\epsilon_t X_{t+h}) \\ &= \gamma_X(h) + \gamma_\epsilon(h) + 0 + 0,\end{aligned}$$
qui ne dépendent pas de t, et donc W est bien stationnaire. Notons que les identités $\mathbb{E}(X_t X_{t+h}) = \gamma_X(h)$ et $\mathbb{E}(\epsilon_t \epsilon_{t+h}) = \gamma_\epsilon(h)$ proviennent du fait que X et ϵ sont centrés et stationnaires, tandis que les identités
$$\mathbb{E}(X_t \epsilon_{t+h}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \mathbb{E}(\eta_{t-k}\epsilon_{t+h}) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\epsilon_t X_{t+h}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \mathbb{E}(\epsilon_t \eta_{t+h-k}) = 0$$
proviennent du fait que ϵ et η sont centrés et décorellés et $X = F_\alpha \eta$ avec $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$;
3. Le processus Y est solution de l'équation $\mathrm{AR}(1)$ $\Phi(B)Y = W$ où $\Phi(z) = 1 - \phi z$ mais W n'est pas un BB. L'équation s'écrit aussi $F_\alpha Y = W$ où $\alpha = \mathbf{1}_0 - \phi \mathbf{1}_1$. Le polynôme Φ a une unique racine, $1/\phi$, qui est de module $\neq 1$, ce qui fait qu'il existe $\beta = \alpha^{-1} \in \ell^1(\mathbb{Z})$, et on obtient une solution stationnaire $Y = F_\beta W$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$, on a $|\phi z| < 1$ car $|\phi| < 1$, et donc $1/\Phi(z) = \sum_{k=0}^\infty \phi^k z^k$ et cette série converge absolument, ce qui fait que $\beta_k = \phi^k \mathbf{1}_{k\geq 0}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, et la solution trouvée s'écrit donc $Y_t = \sum_{k=0}^\infty \phi^k W_{t-k}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Si Y' est une autre solution stationnaire, alors $F_\alpha Y = W = F_\alpha Y'$ et donc $Y' = F_\beta F_\alpha Y' = F_\beta F_\alpha Y = Y$ (cette injectivité du filtage ne repose pas sur le fait que W est un BB ou pas) ;
4. Le processus Z est stationnaire car filtre du processus stationnaire Y. En fait
$$Z = (1-\psi B)(1-\phi B)Y = (1-\psi B)W = (1-\psi B)X + (1-\psi B)\epsilon = \eta + (1-\psi B)\epsilon$$
d'où (notons que $(1-\psi B)\epsilon$ est un $\mathrm{MA}(1)$)
$$\gamma_Z(h) = \gamma_\eta(h) + \gamma_{(1-\psi B)\epsilon} = \mathbf{1}_0 + (1-\psi^2)\mathbf{1}_0 - \psi \mathbf{1}_{\pm 1};$$
5. D'après la question précédente, le processus Z a pour autocovariance
$$(2-\psi^2)\mathbf{1}_0 - \psi \mathbf{1}_{\pm 1} = \sigma^2(1-\vartheta^2) + \sigma\vartheta \mathbf{1}_{\pm 1}$$
où $\sigma^2 = 2$ et $\sigma\vartheta = -\psi$, et c'est l'autocovariance d'un $\mathrm{MA}(1)$ d'équation $Z_t = \zeta_t + \vartheta \zeta_{t-1}$ où $(\zeta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de moyenne 0 et de variance σ^2 ;
6. On a $Z = (1-\phi B)(1-\psi B)Y$ et Z est un processus $\mathrm{MA}(1)$ donc Y est un $\mathrm{ARMA}(2,1)$;
7. Le polynôme de la partie AR de l'équation ARMA de Y est $(1-\phi z)(1-\psi z)$. Ses racines $1/\phi$ et $1/\psi$ sont de module > 1, par conséquent l'équation ARMA de Y admet une solution stationnaire causale ;

8. Il suffit de développer ;
9. Si $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$ alors $|\phi z| < 1$ et $|\psi z| < 1$ et donc le développement en série de puissances suivant est absolument convergent :

$$\frac{1}{(1-\phi z)(1-\psi z)} = \frac{1}{\phi - \psi}\sum_{k=0}^{\infty}(\phi^{k+1} - \psi^{k+1})z^k =: \sum_{k=0}^{\infty}\rho_k z^k.$$

D'où, en observant que $\rho_0 = 1$,

$$f(z) := \frac{1+\vartheta z}{(1-\phi z)(1-\psi z)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(\rho_k - \vartheta\rho_{k-1})z^k,$$

et ainsi on tire de $(1+\vartheta B)\zeta = Z = (1-\psi B)(1-\psi B)Y$ la représentation

$$Y = f(B)\zeta = F_a\zeta \quad \text{avec} \quad a_\ell = \mathbf{1}_{\ell=0} + (\rho_\ell - \vartheta\rho_{\ell-1})\mathbf{1}_{\ell\geq 1}.$$

Solution succincte de l'exercice 2.

1. Il s'agit d'une équation AR(1) de polynôme $\Phi(z) = 1 - \phi z$ dont l'unique racine $1/\phi$ est de module $\neq 1$. L'équation admet donc une unique solution stationnaire. Exprimons explicitement la solution. On $Y = f(B)Z$ où $f(z) = 1/(1-\phi z)$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$ on a $|\phi z| < 1$ car $|\phi| < 1$ et donc $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\phi^k z^k$ et la série est absolument convergente. Il en découle que $Y = \sum_{k=0}^{\infty}\phi^k\epsilon_{t-k}$;
2. Pour tout $t \in \mathbb{Z}$ on a

$$\mu_X(t) = \mathbb{E}(X_t) = \mu.$$

En posant $\alpha_k = \phi^k\mathbf{1}_{k\geq 0}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, il vient, pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et tout $h \in \mathbb{N}$,

$$\gamma_X(t,t+h) = \mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \mathbb{E}(Y_tY_{t+h}) = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}}\alpha_j\alpha_k\gamma_\epsilon(h+k-j) = \sigma^2\sum_{k=0}^{\infty}\phi^{2k+h} = \frac{\sigma^2\phi^h}{1-\phi^2}.$$

Comme $\mu_X(t)$ et $\gamma_X(t,t+h)$ ne dépendent pas de t, il en découle que X est stationnaire. On a enfin $\gamma_X(h) = \sigma^2\phi^{|h|}/(1-\phi^2)$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$;
3. Comme d'après la question précédente $\gamma_X \in \ell^1(\mathbb{Z})$, on en déduit d'après un théorème du cours que X admet une densité spectrale f_X donnée pour tout $u \in [-\pi,\pi]$ par

$$\begin{aligned}
f_X(u) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{h\in\mathbb{Z}}e^{-ihu}\gamma_X(h)\\
&= \frac{\sigma^2}{2\pi(1-\phi^2)}\sum_{h\in\mathbb{Z}}e^{-ihu}\phi^{|h|}\\
&= \frac{\sigma^2}{2\pi(1-\phi^2)}\left(1 + \sum_{h=1}^{\infty}((e^{-iu}\phi)^h + (e^{iu}\phi)^h)\right)\\
&= \frac{\sigma^2}{2\pi(1-\phi^2)}\left(1 + \frac{e^{-iu}\phi}{1-e^{-iu}\phi} + \frac{e^{iu}\phi}{1-e^{iu}\phi}\right)\\
&= \frac{\sigma^2}{2\pi(1-\phi^2)}\frac{(1-e^{-iu}\phi)(1-e^{iu}\phi) + e^{-iu}\phi(1-e^{iu}\phi) + e^{iu}\phi(1-e^{-iu}\phi)}{|1-e^{-iu}\phi|^2}\\
&= \frac{\sigma^2}{2\pi|1-e^{-iu}\phi|^2}.
\end{aligned}$$

Alternativement, un autre théorème du cours affirme que le processus linéaire (filtre d'un bruit blanc) $X = F_\alpha \epsilon$ admet une densité spectrale donnée par

$$u \in [-\pi, \pi] \mapsto \frac{\sigma^2}{2\pi}|P_\alpha(e^{-iu})|^2$$

où $P_\alpha(z) := \sum_{h\in\mathbb{Z}} \alpha_h z^h = 1/(1-\phi z)$ si $z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Ici $\alpha_k = \phi^k \mathbf{1}_{k\geq 0}$ d'où

$$f_X(u) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{1}{|1-\phi e^{-iu}|^2} = \frac{\sigma^2}{2\pi(1+\phi^2-2\phi\cos(u))}.$$

Alternativement, un autre théorème du cours affirme qu'un processus ARMA(p,q) stationnaire de fraction rationnelle $z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \mapsto \Theta(z)/\Phi(z)$ et de bruit blanc de variance σ^2 admet toujours une densité spectrale, donnée par la formule

$$u \in [-\pi, \pi] \mapsto \frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{|\Theta(e^{-iu})|^2}{|\Phi(e^{-iu})|^2}.$$

Dans le cas de notre processus AR(1) X on a $\Theta = 1$ et $\Phi(z) = 1 - \phi z$ de sorte que

$$f_X(u) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{1}{|1-\phi e^{-iu}|^2} = \frac{\sigma^2}{2\pi(1+\phi^2-2\phi\cos(u))};$$

4. L'estimateur est sans biais (c'est-à-dire que $\mathbb{E}(\widehat{\mu}_n) = \mu$) et

$$n\mathrm{Var}(\widehat{\mu}_n) = \frac{1}{n}\sum_{j,k=1}^{n}\gamma_X(j-k) = \sum_{h=-n+1}^{n-1}\frac{n-|h|}{n}\gamma_X(h) = \sum_{h\in\mathbb{Z}}\left(1-\frac{|h|}{n}\right)\mathbf{1}_{|h|<n}\gamma_X(h)$$

d'où par convergence dominée

$$\lim_{n\to\infty} n\mathrm{Var}(\widehat{\mu}_n) = \sum_{h\in\mathbb{Z}}\gamma_X(h) = 2\pi f_X(0) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}.$$

En particulier par l'inégalité de Markov, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé,

$$\mathbb{P}(|\widehat{\mu}_n - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(\widehat{\mu}_n)}{\varepsilon^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0;$$

5. D'après un théorème du cours, comme ϵ est un bruit blanc fort, la variable aléatoire $\sqrt{n}(\widehat{\mu}_n - \mu)$ converge en loi quand $n \to \infty$ vers la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, v^2)$ où $v^2 = \lim_{n\to\infty} n\mathrm{Var}(\widehat{\mu}_n) = 2\pi f_X(0) = \sigma^2/(1-\phi^2)$;
6. L'invervalle est $\widehat{\mu}_n + n^{-1/2}vq_\alpha[-1, 1]$ où q_α est le quantile $1 - \alpha/2$ de $\mathcal{N}(0, 1)$;
7. Le rayon de l'intervalle vaut $n^{-1/2}vq_\alpha$ avec $v = \sigma^2/(1-\phi^2)$, et ce rayon atteint donc son minimum $n^{-1/2}\sigma q_\alpha$ quand $\phi = 0$ (dans ce cas $Y = \epsilon$) ;
8. On utilise le lemme de Slutsky pour remplacer σ^2 et ϕ par un estimateur (cela est fait dans un exercice de TD en utilisant les équations de Yule-Walker par exemple).

Examen partiel

Durée : 2 heures
Date : mercredi 20 novembre 2013
Conditions : sans calculatrice ni documents
Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Solution succincte de l'exercice 1.

1. Par définition, X est un processus causal de Z ssi X_t est une combinaison linéaire de $(Z_s)_{s\leq t}$, pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Donc ici X est causal de Z ssi $a = 0$;
2. L'opérateur $(1-B)^{n+1} = \Delta^{n+1}$ élimine toute tendance polynômiale de degré au plus n, et donc par la formule du binôme,
$$(1-B)^{n+1}(t^n-1+Z_t) = (1-B)^{n+1}Z_t = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-B)^kZ_t = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^kZ_{t-k};$$
3. Comme Z est gaussien, Z_t a tous ses moments finis, et donc X est du second ordre. On a $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(Z_t^2) = \sigma^2$ et $\gamma_X(t,t+h) = \mathbb{E}(Z_t^2Z_{t+h}^2) - \sigma^4$, qui peut dépendre de t a priori. Dans le cas spécial où Z est un bruit blanc fort alors cette quantité vaut $= \tau_4\mathbf{1}_{h=0} + \sigma^4\mathbf{1}_{h\neq 0} - \sigma^4 = (\tau_4 - \sigma^4)\mathbf{1}_{h=0},$, où τ_4 est le moment d'ordre 4 de la loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, et X est alors stationnaire.
4. Les polynômes associés sont $\varphi(z) = 1-2z$ et $\theta(z) = 1-z$. La seule racine de φ est $1/2$, et appartient à l'intérieur du disque unité (la solution sera non causale). La seule racine de θ est 1, qui appartient au cercle unité (on ne peut pas dire que la solution est inversible). La fraction rationnelle est
$$\frac{\theta(z)}{\varphi(z)} = \frac{1-z}{1-2z} = -\frac{z-1}{2z}\frac{1}{1-1/(2z)} = (z-1)\sum_{k=0}^{\infty}(2z)^{-(k+1)} = 2^{-1} - \sum_{k=1}^{\infty}2^{-(k+1)}z^{-k}.$$
La solution de notre ARMA$(1,1)$ est
$$X_t = 2^{-1}Z_t - \sum_{k=1}^{\infty}2^{-(k+1)}Z_{t+k}.$$
Autre méthode : rechercher la solution sous la forme $F_aZ_t = \sum_{h\in\mathbb{Z}}a_hZ_{t-h}$ avec $a_k = 0$ pour tout $k > 0$ (anti-causalité en quelque sorte), en identifiant les coefficients dans l'équation en séries de puissances de z suivante : $(1-2z)(a_0+a_{-1}z^{-1}+a_{-2}z^{-2}+\cdots) = 1-z$. Cela donne $a_0 - 2a_{-1} = 1$, $-2a_0 = -1$, $a_{-k} - 2a_{-k-1} = 0$ pour tout $k \geq 1$, d'où $a_0 = 1/2$, $a_{-1} = -1/2^2$, $a_{-(k+1)} = (1/2)a_{-k} = -1/2^{k+2}$ pour tout $k \geq 1$.
5. Soit $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$ un MA(1). La moyenne est nulle et l'autocovariance
$$\gamma_X(h) = \mathbb{E}(X_tX_{t+h}) = \mathbb{E}((Z_t+\theta Z_{t-1})(Z_{t+h}+\theta Z_{t+h-1})) = \sigma^2(1+\theta^2)\mathbf{1}_{h=0} + \theta\sigma^2\mathbf{1}_{h=\pm 1}$$
Comme $\gamma_X \in \ell^1(\mathbb{Z})$, sa densité spectrale vaut, pour tout $u \in [-\pi,\pi]$,
$$f(u) = \frac{1}{2\pi}\sum_{h\in\mathbb{Z}}\gamma_X(h)e^{-ihu} = \frac{\sigma^2}{2\pi}(1+\theta^2+\theta(e^{-iu}+e^{+iu})) = \frac{\sigma^2}{2\pi}(1+\theta^2+2\theta\cos(u)).$$

Solution succincte de l'exercice 2.

1. On a $X = F_\alpha Z$, qui est bien défini si $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ (théorème de filtrage du cours). On a $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ ssi $|\lambda| < 1$ (série géométrique) ;
2. Le processus X est stationnaire car processus linéaire (filtre d'un bruit blanc, lui même stationnaire). Le processus est causal car X_t est fonction de $Z_{s\leq t}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. La moyenne de X est nulle, et l'autocovariance pour $h \geq 0$ vaut
$$\gamma_X(h) = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \gamma_Z(h+j-k)\alpha_j\alpha_k \quad = \sigma^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_j\alpha_{h+j} = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j\lambda^{h+j} \quad = \sigma^2 \frac{\lambda^{|h|}}{1-\lambda^2}.$$
3. Si $\lambda = 1$ alors $\sum_{k=0}^{\infty} Z_{t-k}$ diverge dans L^2 : $\mathbb{E}((Z_t + \cdots + Z_{t-k})^2) = \sigma^2 k$.

Solution succincte de l'exercice 3.

1. $\alpha_k = \lambda^k \mathbf{1}_{k\geq 0}$ et $\beta_k = \mathbf{1}_{k=0}$;
2. La fonction $\varphi(z) = 1+\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k z^k = 1/(1-\lambda z)$ (pour $|\lambda z| < 1$) n'est pas un polynôme, et on ne peut pas appliquer le théorème du cours. Cependant, par analogie, $\varphi(z) = 0$ n'a pas de racine, et $\theta(z) = 1$, et donc $\theta(z)/\varphi(z) = 1 - \lambda z$, ce qui suggère que le processus $X_t = Z_t - \lambda Z_{t-1}$, qui est un MA(1), est solution de notre équation AR(∞). On le vérifie directement :
$$Z_t - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k X_{t-k} = Z_t - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k Z_{t-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k+1} Z_{t-1-k} = Z_t - \lambda Z_{t-1} = X_t.$$

Examen final

Durée : 2 heures
Date : jeudi 23 janvier 2014
Conditions : sans calculatrice ni documents
Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Solution succincte de l'exercice 1.

1. $(1-B)X_t = X_t - X_{t-1} = t+1+Z_t-(t+Z_{t-1}) = 1+Z_t-Z_{t-1} = 1+(I-B)Z_t$;
2. Y_t est un MA(1) de paramètre $\theta = -1$, de moyenne $\mu_Y = 1$, et d'autocovariance $\gamma_Y(h) = \sigma^2(1+\theta^2)\mathbf{1}_{h=0} + \sigma^2\theta\mathbf{1}_{|h|=1} = \sigma^2(2\mathbf{1}_{h=0} - \mathbf{1}_{|h|=1})$;
3. Pas forcément. Contre-ex. : $\alpha_k = (1/k)\mathbf{1}_{k>0}$ (série harmonique). On a $\ell^1(\mathbb{Z}) \subsetneq \ell^2(\mathbb{Z})$;
4. Comme $\gamma_Z(h) = \sigma^2\mathbf{1}_{h=0}$, on obtient $\mathbb{E}(|\sum_{k\in K}\alpha_k Z_{t-k}|^2) = \sigma^2\sum_{k\in K}|\alpha_k|^2$ pour toute partie finie $K \subset \mathbb{Z}$ (on peut alternativement invoquer l'orthogonalité et le théorème de Pythagore). Donc grâce au critère de Cauchy dans l'espace complet L^2, on obtient que la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\alpha_k Z_{t-k}$ converge dans L^2, et on note sa somme $(F_\alpha Z)_t$.

Solution succincte de l'exercice 2.

1. Le polynôme $P_\varphi(z) = 1-(1/2)z$ a une seule racine, 2, de module > 1. L'équation admet donc une unique solution stationnaire, causale, de la forme $X = F_\alpha Z$ (processus linéaire) avec $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et $\alpha_k = 0$ si $k < 0$. D'autre part, $P_\theta(z) = 1+2z$ admet une unique racine, $-1/2$, de module < 1, donc la solution n'est pas inversible. Pour calculer α, comme $\alpha_k = 0$ pour tout $k < 0$, il suffit de résoudre le système triangulaire $(1-(1/2)z)(\alpha_0+\alpha_1 z+\cdots) = 1+2z$, c'est-à-dire $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 - (1/2)\alpha_0 = 2$, $\alpha_k - (1/2)\alpha_{k-1} = 0$ pour tout $k \geq 2$, ce qui donne $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 2+1/2 = 5/2$, $\alpha_k = 5(1/2)^k$ pour tout $k \geq 1$. Alternativement, on peut développer la fraction rationnelle de l'équation : comme $|(1/2)z| = 1/2 < 1$ pour $|z| = 1$, on obtient
$$\frac{P_\theta(z)}{P_\varphi(z)} = \frac{1+2z}{1-(1/2)z} = (1+2z)\sum_{k=0}^{\infty}(1/2)^k z^k = 1+\sum_{k=1}^{\infty}((1/2)^k+2(1/2)^{k-1})z^k = 1+\sum_{k=1}^{\infty}5(1/2)^k z^k;$$
Il est agréable de vérifier qu'on a bien $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ (série géométrique convergente). Il est aussi judicieux de vérifier la formule pour $z = 1$, ce qui donne $6 = 6$;
2. Avec des filtres, l'équation s'écrit sous la forme $F_\varphi Z = F_\theta Z$ où $\varphi_k = \mathbf{1}_{k=0} - (1/2)\mathbf{1}_{k=1}$ et $\theta_k = \mathbf{1}_{k=0} + 2\mathbf{1}_{k=1}$, et la solution s'écrit $X = F_{\varphi^{-1}*\theta}Z$, tandis qu'avec l'opérateur retard B, l'équation s'écrit $P_\varphi(B)X = P_\theta(B)Z$, où P_φ et P_θ sont comme dans la réponse à la question précédente, et la solution s'écrit $X = (P_\theta/P_\varphi)(B)Z$;
3. D'après le théorème de filtrage des processus stationnaires, pour $h \geq 0$,
$$\gamma_X(h) = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}}\alpha_j\alpha_k\gamma_Z(h+j-k) = \sigma^2\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j\alpha_{h+j};$$
4. D'après la question précédente, pour tout $h \geq 0$, $\gamma_X(h) = \sigma^2(\alpha_h + \sum_{j=1}^{\infty}25(1/2)^{2j+h})$ d'où, pour tout $h \in \mathbb{Z}$, $\gamma_X(h) = \sigma^2(\mathbf{1}_{h=0} + 5(1/2)^{|h|}\mathbf{1}_{|h|\neq 0} + (25/3)(1/2)^{|h|})$. Ainsi, $\gamma_X(h) \to 0$ exponentiellement vite quand $|h| = |t-s| \to \infty$;

5. On a $H_{t-1,p} = \mathrm{Vect}(X_{t-1}, \ldots, X_{t-p})$ et donc $H_{1,1} = \mathrm{Vect}(X_1)$. Par conséquent, on a

$$\mathrm{proj}(X_2, H_{1,1}) = \frac{\langle X_2, X_1 \rangle}{\|X\|_2^2} X_1 = \frac{\gamma_X(1)}{\gamma_X(0)} X_1.$$

   On pouvait aussi utiliser le théorème de Yule-Walker avec $p = 1$. Reste à calculer $\gamma_X(0)$ et $\gamma_X(1)$, soit via une formule ci-dessus pour $\gamma_X(h)$, soit directement

$$\gamma_X(0) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^2 = \sigma^2 \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} 5^2 (1/2)^{2j}\right) = \sigma^2 \left(1 + \frac{25}{3}\right) = \frac{28}{3}\sigma^2.$$

   et

$$\gamma_X(1) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \alpha_{j+1} = \sigma^2 \left(\frac{5}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} 25(1/2)^{2j+1}\right) = \sigma^2 \left(\frac{5}{2} + \frac{25}{6}\right) = \frac{20}{3}\sigma^2$$

   et donc $\mathrm{proj}(X_2, H_1) = \frac{5}{7} X_1$. Par stationnarité, $\mathrm{proj}(X_t, H_{t-1,1}) = \frac{5}{7} X_{t-1}$, $\forall t \in \mathbb{Z}$.

Solution succincte de l'exercice 3. On a $P_\varphi(z) = 1/(1-\alpha z)$ et $P_\theta(z) = 1/(1-\beta z)$. Si $|z| = 1$ alors $|\beta z| < 1$ et

$$\frac{P_\theta(z)}{P_\varphi(z)} = \frac{1-\alpha z}{1-\beta z} = (1-\alpha z) \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k z^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1}(\beta - \alpha) z^k.$$

Si $\eta_k = \mathbf{1}_{k=0} + (\beta - \alpha)\beta^{k-1}\mathbf{1}_{k>0}$ alors $\eta \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Cela fournit le candidat $X = F_\eta Z$, dont on vérifie sans difficulté qu'il est bien solution. Cette solution est causale. Lorsque $\alpha = \beta$, on a $\eta_k = \mathbf{1}_{h=0}$ et donc $X = F_\eta = Z$ est solution, ce qui est bien naturel.

Solution succincte de l'exercice 4.

1. Le processus est centré car $\mathbb{E}(X_t) = \cos(\theta t)\mathbb{E}(A) + \sin(\theta t)\mathbb{E}(B) = 0$. D'autre part

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t X_{t+h}) &= \cos(\theta t)\cos(\theta(t+h))\mathbb{E}(A^2) + \sin(\theta t)\sin(\theta(t+h))\mathbb{E}(B^2) + (\cdots)\underbrace{\mathbb{E}(AB)}_{=0} \\ &= \sigma^2 \mathrm{Re}(e^{i\theta t} e^{-i\theta(t+h)}) = \sigma^2 \mathrm{Re}(e^{-i\theta h}) = \sigma^2 \cos(\theta h),\end{aligned}$$

   qui ne dépend pas de t. Donc le processus est stationnaire et $\gamma_X(h) = \sigma^2 \cos(\theta h)$;
2. $\Gamma_n(j,k) = \gamma_X(j-k) = \sigma^2 \cos(\pi(j-k)) = \sigma^2(-1)^{j-k}$ pour tous $1 \leq j, k \leq n$. La matrice Γ_n est réelle $n \times n$ symétrique à diagonales constantes (matrice de Toeplitz). La valeur diagonale principale est σ^2, et les valeurs suivantes sont $-\sigma^2, +\sigma^2, -\sigma^2, \ldots$;
3. $\gamma_X(h) = \sigma^2 \cos(\theta h) = \frac{\sigma^2}{2}(e^{-i\theta h} + e^{i\theta h}) = \int_{[-\pi,\pi]} e^{iuh}\, d\mu(u)$ pour $\mu = \frac{\sigma^2}{2}(\delta_{-\theta} + \delta_\theta)$ (Bernoulli !). La densité spectrale n'existe pas (présence de masses de Dirac) ;
4. $\sum_{h \in \mathbb{Z}} |\gamma_X(h)|$ diverge car $|\cos(\theta h)| \not\to 0$ (facile à voir quand $\theta \in \mathbb{Q}\pi$) donc $\gamma_X \notin \ell^1(\mathbb{Z})$. On peut aussi utiliser le fait que la densité spectrale n'existe pas (question précédente) et donc $\gamma_X \notin \ell^1(\mathbb{Z})$ car sinon cela contredirait le théorème de Herglotz ;
5. Courbe représentative de $t \mapsto A(\omega)\cos(\theta t)$. Amplitude $A(\omega)$ et fréquence θ.

Solution succincte de l'exercice 5.

1. $\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$;
2. $\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n}(\mathbb{E}(X_1) + \cdots + \mathbb{E}(X_n)) = \mu$ dont le biais de $\overline{X}_n$ est nul ;

3. La variance et l'ÉQM sont identiques car le biais est nul.

$$\mathrm{Var}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{j,k=1}^{n}\mathbb{E}((X_j-\mu)(X_k-\mu)) = \frac{1}{n^2}\sum_{j,k=1}^{n}\gamma(j-k) = \frac{1}{n}\sum_{s=-n+1}^{n-1}\left(\frac{n-|s|}{n}\right)\gamma(s);$$

4. Si $\gamma(h)\to 0$ quand $h\to\infty$ alors le critère de Cesàro donne $\frac{1}{n}\sum_{s=-n+1}^{n-1}|\gamma(s)|\to 0$ quand $n\to\infty$, et donc $\mathrm{Var}(\overline{X}_n)\leq\frac{1}{n}\sum_{s=-n+1}^{n-1}|\gamma(s)|\to 0$ quand $n\to\infty$;
5. Si $\gamma\in\ell^1(\mathbb{Z})$ alors par convergence dominée, $n\mathrm{Var}(\overline{X}_n)\to\sum_{h\in\mathbb{Z}}\gamma(h)$ quand $n\to\infty$.

Examen de rattrapage

Durée : 2 heures
Date : lundi 1er septembre 2014
Conditions : sans calculatrice ni documents
Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Solution succincte de l'exercice 1.

1. Par définition, X est un processus causal de Z ssi X_t est une combinaison linéaire de $(Z_s)_{s\leq t}$, pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Donc ici X est causal de Z ssi $a = 0$;
2. L'opérateur $(B-1)^{n+1} = (-1)^{n+1}\Delta^{n+1}$ élimine toute tendance polynômiale de degré au plus n, et donc par la formule du binôme,
$$(B-1)^{n+1}(t^n-1+Z_t) = (B-1)^{n+1}Z_t = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^{n+1-k}B^kZ_t = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^{n+1-k}Z_{t-k};$$
3. Comme Z est gaussien, Z_t a tous ses moments finis, et donc X est du second ordre. On a $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(Z_t^4) =: m_4$ et $\mathbb{E}(X_tX_{t+h}) = \mathbb{E}(Z_t^4Z_{t+h}^4)$, qui peut dépendre de t a priori. Dans le cas spécial où Z est un bruit blanc fort alors cette quantité vaut $= m_8\mathbf{1}_{h=0} + m_4^2\mathbf{1}_{h\neq 0}$,, où m_k est le moment d'ordre k de la loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$, ce qui donne $\gamma_X(t,t+h) = (m_8 - m_4^2)\mathbf{1}_{h=0}$, et X est stationnaire.
4. L'équation se simplifie en $X_t = 2X_{t-1} + Z_t - Z_{t-1}$. Les polynômes associés sont $\varphi(z) = 1-2z$ et $\theta(z) = 1-z$. La seule racine de φ est $1/2$, et appartient à l'intérieur du disque unité (la solution sera non causale). La seule racine de θ est 1, qui appartient au cercle unité (on ne peut pas dire que la solution est inversible). La fraction rationnelle est
$$\frac{\theta(z)}{\varphi(z)} = \frac{1-z}{1-2z} = -\frac{z-1}{2z}\frac{1}{1-1/(2z)} = (z-1)\sum_{k=0}^{\infty}(2z)^{-(k+1)} = 2^{-1} - \sum_{k=1}^{\infty}2^{-(k+1)}z^{-k}.$$
La solution de notre ARMA$(1,1)$ est
$$X_t = 2^{-1}Z_t - \sum_{k=1}^{\infty}2^{-(k+1)}Z_{t+k}.$$
Autre méthode : rechercher la solution sous la forme $F_aZ_t = \sum_{h\in\mathbb{Z}}a_hZ_{t-h}$ avec $a_k = 0$ pour tout $k > 0$ (anti-causalité en quelque sorte), en identifiant les coefficients dans l'équation en séries de puissances de z suivante : $(1-2z)(a_0+a_{-1}z^{-1}+a_{-2}z^{-2}+\cdots) = 1-z$. Cela donne $a_0 - 2a_{-1} = 1$, $-2a_0 = -1$, $a_{-k} - 2a_{-k-1} = 0$ pour tout $k \geq 1$, d'où $a_0 = 1/2$, $a_{-1} = -1/2^2$, $a_{-(k+1)} = (1/2)a_{-k} = -1/2^{k+2}$ pour tout $k \geq 1$.
5. Soit $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$ un MA(1). La moyenne est nulle et l'autocovariance
$$\gamma_X(h) = \mathbb{E}(X_tX_{t+h}) = \mathbb{E}((Z_t+\theta Z_{t-1})(Z_{t+h}+\theta Z_{t+h-1})) = \sigma^2(1+\theta^2)\mathbf{1}_{h=0} + \theta\sigma^2\mathbf{1}_{h=\pm1}$$
Comme $\gamma_X \in \ell^1(\mathbb{Z})$, sa densité spectrale vaut, pour tout $u \in [-\pi,\pi]$,
$$f_X(u) = \frac{1}{2\pi}\sum_{h\in\mathbb{Z}}\gamma_X(h)e^{-ihu} = \frac{\sigma^2}{2\pi}(1+\theta^2+\theta(e^{-iu}+e^{+iu})) = \frac{\sigma^2}{2\pi}(1+\theta^2+2\theta\cos(u)).$$
Autre méthode : $f_X(u) = f_Z(u)\left|P(e^{-iu})\right|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left|1+\theta e^{-iu}\right|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi}(1+\theta e^{-iu})(1+\theta e^{iu}) = \frac{\sigma^2}{2\pi}(1+\theta^2+\theta 2\cos(u))$.

Solution succincte de l'exercice 2. On note α^2 la suite définie par $\alpha_k^2 = (\alpha_k)^2$.

1. On a $X = F_{\alpha^2} Z$, qui est bien défini si $\alpha^2 \in \ell^1(\mathbb{Z})$ (théorème de filtrage du cours) c'est-à-dire si $\alpha \in \ell^2(\mathbb{Z})$. On a $\alpha \in \ell^p(\mathbb{Z})$ pour (tout) $p \geq 1$ ssi $|\lambda| < 1$ (série géométrique) ;
2. Le processus X est stationnaire car processus linéaire (filtre d'un bruit blanc, lui même stationnaire). Le processus est causal car X_t est fonction de $Z_{s \leq t}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. La moyenne de X est nulle, et l'autocovariance pour $h \geq 0$ vaut
$$\gamma_X(h) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \gamma_Z(h + j - k)\alpha_j^2 \alpha_k^2 \quad = \sigma^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j^2 \alpha_{h+j}^2 = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{2j} \lambda^{2(h+j)} \quad = \sigma^2 \frac{\lambda^{2|h|}}{1 - \lambda^4}.$$
3. Si $\lambda = 1$ alors $\sum_{k=0}^{\infty} Z_{t-k}$ diverge dans L^2 : $\mathbb{E}((Z_t + \cdots + Z_{t-k})^2) = \sigma^2 k$.

Solution succincte de l'exercice 3.

1. $\alpha_k = \lambda^k \mathbf{1}_{k \geq 0}$ et $\beta_k = \mathbf{1}_{k=0}$;
2. La fonction $\varphi(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{2k} z^k = 1/(1 - \lambda^2 z)$ (pour $|\lambda^2 z| < 1$) n'est pas un polynôme, et on ne peut pas appliquer le théorème du cours. Cependant, par analogie, $\varphi(z) = 0$ n'a pas de racine, et $\theta(z) = 1$, et donc $\theta(z)/\varphi(z) = 1 - \lambda^2 z$, ce qui suggère que le processus $X_t = Z_t - \lambda^2 Z_{t-1}$, qui est un MA$(1)$, est solution de notre équation AR(∞). On le vérifie directement :
$$Z_t - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{2k} X_{t-k} = Z_t - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{2k} Z_{t-k} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{2(k+1)} Z_{t-1-k} = Z_t - \lambda^2 Z_{t-1} = X_t.$$

Solution succincte de l'exercice 4.

1. Le processus est centré car $\mathbb{E}(X_t) = \cos(\theta t)\mathbb{E}(A) + \sin(\theta t)\mathbb{E}(B) = 0$. D'autre part
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_t X_{t+h}) &= \cos(\theta t)\cos(\theta(t+h))\mathbb{E}(A^2) + \sin(\theta t)\sin(\theta(t+h))\mathbb{E}(B^2) + (\cdots)\underbrace{\mathbb{E}(AB)}_{=0} \\ &= \sigma^2 \mathrm{Re}(e^{i\theta t} e^{-i\theta(t+h)}) = \sigma^2 \mathrm{Re}(e^{-i\theta h}) = \sigma^2 \cos(\theta h),\end{aligned}$$
qui ne dépend pas de t. Donc le processus est stationnaire et $\gamma_X(h) = \sigma^2 \cos(\theta h)$;
2. $\Gamma_n(j,k) = \gamma_X(j-k) = \sigma^2 \cos(\pi(j-k)) = \sigma^2(-1)^{j-k}$ pour tous $1 \leq j, k \leq n$. La matrice Γ_n est réelle $n \times n$ symétrique à diagonales constantes (matrice de Toeplitz). La valeur diagonale principale est σ^2, et les valeurs suivantes sont $-\sigma^2, +\sigma^2, -\sigma^2, \ldots$;
3. $\gamma_X(h) = \sigma^2 \cos(\theta h) = \frac{\sigma^2}{2}(e^{-i\theta h} + e^{i\theta h}) = \int_{[-\pi,\pi]} e^{iuh}\, d\mu(u)$ pour $\mu = \frac{\sigma^2}{2}(\delta_{-\theta} + \delta_\theta)$ (Bernoulli !). La densité spectrale n'existe pas (présence de masses de Dirac) ;
4. $\sum_{h \in \mathbb{Z}} |\gamma_X(h)|$ diverge car $|\cos(\theta h)| \not\to 0$ (facile à voir quand $\theta \in \mathbb{Q}\pi$) donc $\gamma_X \notin \ell^1(\mathbb{Z})$. On peut aussi utiliser le fait que la densité spectrale n'existe pas (question précédente) et donc $\gamma_X \notin \ell^1(\mathbb{Z})$ car sinon cela contredirait le théorème de Herglotz ;
5. Courbe représentative de $t \mapsto A(\omega)\cos(\theta t)$. Amplitude $A(\omega)$ et fréquence θ.

Solution succincte de l'exercice 5.

1. $\overline{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$;
2. $\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n}(\mathbb{E}(X_1) + \cdots + \mathbb{E}(X_n)) = \mu$ dont le biais de $\overline{X}_n$ est nul ;

3. La variance et l'ÉQM sont identiques car le biais est nul.

$$\mathrm{Var}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{j,k=1}^{n}\mathbb{E}((X_j-\mu)(X_k-\mu)) = \frac{1}{n^2}\sum_{j,k=1}^{n}\gamma(j-k) = \frac{1}{n}\sum_{s=-n+1}^{n-1}\left(\frac{n-|s|}{n}\right)\gamma(s);$$

4. Si $\gamma(h) \to 0$ quand $h \to \infty$ alors le critère de Cesàro donne $\frac{1}{n}\sum_{s=-n+1}^{n-1}|\gamma(s)| \to 0$ quand $n \to \infty$, et donc $\mathrm{Var}(\overline{X}_n) \leq \frac{1}{n}\sum_{s=-n+1}^{n-1}|\gamma(s)| \to 0$ quand $n \to \infty$;
5. Si $\gamma \in \ell^1(\mathbb{Z})$ alors par convergence dominée, $n\mathrm{Var}(\overline{X}_n) \to \sum_{h\in\mathbb{Z}}\gamma(h)$ quand $n \to \infty$.

Examen partiel

Durée : 2 heures
Date : mercredi 19 novembre 2014
Conditions : sans calculatrice ni documents
Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Solution succincte de l'exercice 1.

1. Comme $t \mapsto \cos((2/3)\pi t)$ est de période 3, on a $\Delta_3 S_t = 0 + \Delta_3 Z_t = Z_t - Z_{t-3}$;
2. Comme les v.a.r. $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sont indépendantes, de carré intégrable, de même moyenne et variance, il s'agit bien d'un bruit blanc fort. La moyenne vaut 0 car les variables sont centrées, et la variance vaut 1 car les variables sont réduites ;
3. Les v.a.r. $(Z_t^p)_{t\in\mathbb{Z}}$ sont indépendantes, de carré intégrable, de même moyenne et variance : il s'agit donc d'un bruit blanc fort. Pour tout $h \in \mathbb{Z}$ on a $\mu(h) = \mathbb{E}(Z_0^p)$ $(= 0$ si p impair) et $\gamma(h) = (\mathbb{E}(Z_0^{2p}) - \mathbb{E}(Z_0^p)^2)\mathbf{1}_{h=0}$;
4. $\gamma_X(h) = 0$ si $|h| > 2$, et $\gamma_X(0) = \mathrm{Var}(aZ_{-1} + bZ_1) = a^2 + b^2$, $\gamma_X(-1) = \gamma_X(1) = \mathrm{E}((aZ_0 + bZ_2)(aZ_1 + bZ_3)) = 0$, et $\gamma_X(-2) = \gamma_X(2) = \mathrm{E}(bZ_2 aZ_2) = ab$.
5. X est causal ssi X_t ne dépend que de $(Z_s)_{s\leq t}$, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, ce qui a lieu si $b = 0$. Le filtre X de Z est inversible ssi Z est un filtre causal de X, ce qui a lieu si $a = 0$.

Solution succincte de l'exercice 2.

1. On a $X_t = \sum_{k=0}^n \varphi^k Z_{t-k} + \varphi^{n+1} X_{t-(n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $|\varphi| < 1$ alors le premier terme du membre de droite est une série absolument convergence dans L^2 (et p.s.) ce qui suggère que $X_t = \sum_{k=0}^n \varphi^k Z_{t-k}$ est solution, ce qui se vérifie directement. Lorsque $|\varphi| > 1$ on procède de même en renversant le temps à partir de l'équation $X_{t-1} = \varphi^{-1} X_t - \varphi^{-1} Z_t$, ce qui conduit à la solution non-causale $X_t = -\sum_{k=1}^\infty \varphi^{-k} Z_{t+k}$. Lorsque $|\varphi| = 1$ alors il ne peut pas exister de solution stationnaire car sinon l'équation $\sum_{k=0}^n \varphi^k Z_{t-k} = X_t - \varphi^{n+1} X_{t-(n+1)}$ donnerait en prenant la variance $(n+1)\sigma^2 \leq 4\gamma_X(0)$ ce qui est impossible lorsque $n \gg 1$;
2. $X = F_\alpha Z$ avec $\alpha_k = \varphi^k \mathbf{1}_{k\in\mathbb{N}}$ donc pour tout $h \in \mathbb{N}$,
$$\gamma_X(-h) = \gamma_X(h) = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \alpha_j \alpha_k \gamma_Z(h + j - k) = \sigma^2 \sum_{j\geq 0} \varphi^{2j+h} = \sigma^2 \frac{\varphi^h}{1 - \varphi^2}.$$
Pour la densité spectrale, on écrit, pour tout $t \in [-\pi, \pi]$,
$$f_X(t) = |P_\alpha(e^{-itj})|^2 f_Z(t) = \left|\sum_{j\in\mathbb{N}} \varphi^j e^{-itj}\right|^2 \frac{\sigma^2}{2\pi} = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\frac{1}{1 - \varphi e^{-it}}\right|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{1}{1 - 2\varphi\cos(t) + \varphi^2}.$$
3. L'équation s'écrit sous forme standard
$$X_t = \frac{1}{2} X_{t-1} + Z_t + \frac{1}{2} Z_{t-1}$$
et donc $\Phi(z) = P_{\alpha_\varphi}(z) = 1 - z/2$ et $\Theta(z) = P_{\alpha_\theta}(z) = 1 + z/2$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$, on a $|z/2| < 1$ et donc $\frac{1}{\Phi(z)} = \frac{1}{1-z/2} = \sum_{k=0}^\infty (z/2)^k$ d'où
$$\frac{\Theta(z)}{\Phi(z)} = \sum_{k=0}^\infty 2^{-k} z^k + \sum_{k=1}^\infty 2^{-k} z^k = 1 + \sum_{k=1}^\infty 2^{-k+1} z^k.$$
Cela donne la solution causale $X_t = Z_t + \sum_{k=1}^\infty 2^{-k+1} Z_{t-k}$;

4. On a $X = F_\psi Z$ où $\psi_k = \mathbf{1}_{k=0} + \mathbf{1}_{k>0}2^{-k+1}$. Or pour tout $h \geq 0$,

$$\gamma_X(-h) = \gamma_X(h) = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \psi_j\psi_k\gamma_Z(h+j-k) = \sigma^2\sum_{j\geq 0}\psi_j\psi_{h+j}$$

car $\gamma_Z = \sigma^2\mathbf{1}_0$. Comme $|\psi_k| \leq 2\rho^k$ pour tout $k \geq 0$, avec $\rho = 1/2$, on obtient

$$\left|\sigma^2\sum_{j\geq 0}\psi_j\psi_{h+j}\right| \leq \sigma^2 2\rho^h\sum_{j\geq 0}\rho^{2j} = \sigma^2 2\rho^h\frac{1}{1-\rho^2} = C\rho^h.$$

5. Prenons $\alpha_k = k^{-a}\mathbf{1}_{k\geq 1}$ pour $a > 1$, de sorte que $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Pour tout $h \geq 0$, on a

$$\gamma_X(-h) = \gamma_X(h) = \sigma^2\sum_{k\geq 1}\frac{1}{(k(k+h))^a} \geq \sigma^2\int_1^\infty\frac{dx}{(x+h)^{2a}} = \frac{\sigma^2}{(2a-1)(1+h)^{2a-1}},$$

qui décroît polynomialement et non pas exponentiellement quand $|h| \to \infty$.

Examen final

Durée : 2 heures
Date : vendredi 23 janvier 2015
Conditions : sans calculatrice ni documents
Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Solution succincte de l'exercice 1. Soit α_φ et α_θ les suites associées à Φ et Θ, de sorte que $P_{\alpha_\varphi} = \Phi$ et $P_{\alpha_\theta} = \Theta$.

1. Si Φ ne s'annule pas sur le cercle unité, alors α_φ est inversible pour le produit de convolution $*$ dans $\ell^1(\mathbb{Z})$ et son inverse α_φ^{-1} est donné par le développement en série de puissances de z de la fraction rationnelle $\Theta(z)/\Phi(z)$ (qui convergence dans un voisinage du cercle unité). Le processus linéaire $X = F_{\alpha_\varphi^{-1}} F_{\alpha_\theta} Z$ est solution car $F_{\alpha_\varphi} X = F_{\alpha_\varphi * \alpha_\varphi^{-1} * \alpha_\theta} F_{\alpha_\theta} Z = F_{\alpha_\theta} Z$. Pour l'unicité, si X est une solution stationnaire, alors comme α_φ^{-1} existe et $F_{\alpha_\varphi} X = F_{\alpha_\theta} Z$, on obtient $X = F_{\alpha_\varphi^{-1}} F_{\alpha_\theta} Z = F_{\alpha_\varphi^{-1} * \alpha_\theta} Z$;
2. Si Φ ne s'annule pas sur le disque unité fermé, alors α_φ^{-1} est porté par $\mathbb{N}$, et comme α_θ est porté par $\mathbb{N}$ aussi (c'est un polynôme) il en est de même de leur produit de convolution, ce qui signifie que X est causal ;
3. Si Φ ne s'annule pas sur le cercle unité et si Θ ne s'annule pas sur le disque unité fermé, alors α_θ est inversible pour le produit de convolution, son inverse est porté par $\mathbb{N}$, et comme α_φ est également porté par $\mathbb{N}$ (c'est un polynôme), il en va de même pour $\alpha_\theta^{-1} * \alpha_\varphi$, et donc X est inversible car $Z = F_{\alpha_\theta^{-1} * \alpha_\varphi} X$;
4. Les équations ARMA de même fraction rationnelle ont mêmes solutions. $(p', q') = (p - m, q - m)$ où $m = \deg(Q)$.

Solution succincte de l'exercice 2.

1. On a $\Phi(z) = (1 - z + (1/4)z^2) = (z-2)^2/4$ et $\Theta(z) = 1 - z/2 = -(z-2)/2$ dont l'unique racine est 2 (elle est double pour Φ). Comme Φ ne s'annule pas sur le cercle unité, l'équation ARMA possède une unique solution stationnaire notée X, processus linéaire de Z. Comme de plus Φ ne s'annule pas sur le disque unité, X est causale. Comme Θ ne s'annule pas sur le disque unité fermé, X est inversible. Le calcul de X se fait en développant en série de puissances la fraction rationnelle de l'ARMA, dans un voisinage du cercle unité. Ici $|z| = 1$ implique que $|z/2| < 1$ ce qui permet le développement en série géométrique suivant :
$$\frac{\Theta(z)}{\Phi(z)} = -\frac{4(z-2)}{2(z-2)^2} = \frac{2}{2-z} = \frac{1}{1-z/2} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} z^k.$$
d'où, en posant $\alpha_k = 2^{-k}\mathbf{1}_{k\geq 0}$,
$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} Z_{t-k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k Z_{t-k}$$
Elle est manifestement causale. On vérifie facilement directement qu'il s'agit bien d'une solution de l'équation irréductible $X_t - (1/2)X_{t-1} = Z_t$ qui est AR(1) :
$$X_t - (1/2)X_{t-1} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} Z_{t-k} - \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(k+1)} Z_{t-1-k} = Z_t.$$
La solution est manifestement inversible car on a
$$Z_t = (\Phi/\Theta)(B)X_t = (1 - B/2)X_t = X_t - (1/2)X_{t-1};$$

2. Pour tout $h \geq 0$ on a

$$\gamma_X(h) = \gamma_{F_\alpha Z}(h) = \sigma^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \alpha_{k+h} = \sigma^2 \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2k-h} = \sigma^2 2^{-h} \sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k} = \frac{4}{3}\frac{\sigma^2}{2^h}.$$

Donc $\gamma_X(h) = (4/3)\sigma^2 2^{-|h|}$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$. On a $H_{t-1,1} = \mathrm{vect}\{X_{t-1}\}$ d'où

$$\mathrm{proj}(X_s, H_{t-1,1}) = \frac{\langle X_s, X_{t-1}\rangle}{\|X_{t-1}\|^2} X_{t-1} = \frac{\gamma_X(s-t+1)}{\gamma_X(0)} X_{t-1} = 2^{-|s-t-1|} X_{t-1}.$$

Cette variable aléatoire tend presque sûrement vers 0 quand $s \to \infty$.

3. Un calcul (à faire !) montre que $\mathrm{Var}(\sqrt{n}\overline{X}_n) \to \sigma^2 \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k\right)^2 = 4\sigma^2$ quand $n \to \infty$. Comme Z est un BB fort gaussien, la variable $\sqrt{n}\overline{X}_n$ est gaussienne. Comme sa moyenne est nulle et sa variance converge vers $4\sigma^2$, elle converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 4\sigma^2)$. Cette propriété permet de mettre en place un test pour savoir si le bruit blanc est fort (elle reste vraie si le bruit blanc est fort mais pas gaussien).

Solution succincte de l'exercice 3.

1. Les polynômes Φ_* et Θ_* ont pour racines respectives

$$\frac{1}{\overline{a_1}}, \ldots, \frac{1}{\overline{a_r}}, a_{r+1}, \ldots, a_p \quad \text{et} \quad \frac{1}{\overline{b_1}}, \ldots, \frac{1}{\overline{b_s}}, b_{s+1}, \ldots, b_q,$$

qui sont toutes à l'extérieur du disque unité : l'application $z \mapsto 1/\overline{z}$ conserve l'argument et inverse le module. Donc l'équation ARMA(p,q) $\Phi_*(B)X_* = \Theta_*(B)X_*$ possède une unique solution stationnaire notée X_*. À présent, comme Φ_* et Θ_* ne s'annulent pas sur le disque unité fermé, le processus ARMA(p,q) X_* est causal et inversible ;

2. Par définition, on a

$$\Phi(z) = 1 - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j z^j = -\varphi_p \prod_{j=1}^{p} (z - a_j) \quad \text{et} \quad \Theta(z) = 1 + \sum_{j=1}^{q} \theta_j z^j = \theta_q \prod_{j=1}^{q} (z - b_j).$$

Comme $\Phi(0) = \Theta(0) = 1$, on a $|a_1 \cdots a_p \varphi_p| = |b_1 \cdots b_q \theta_q| = 1$, et

$$|\Phi(z)| = \prod_{j=1}^{p} \left|\frac{z - a_j}{a_j}\right| = \prod_{j=1}^{p} |1 - a_j^{-1} z| \quad \text{et} \quad |\Theta(z)| = \prod_{j=1}^{q} \left|\frac{z - b_j}{b_j}\right| = \prod_{j=1}^{q} \left|1 - b_j^{-1} z\right|.$$

Il en découle que pour tout $u \in [-\pi, \pi]$,

$$f_X(u) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{|P_\theta(e^{-iu})|^2}{|P_\varphi(e^{-iu})|^2} = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{\prod_{j=1}^{q} \left|1 - b_j^{-1} e^{-iu}\right|^2}{\prod_{j=1}^{p} \left|1 - a_j^{-1} e^{-iu}\right|^2} = \frac{\sigma_*^2}{2\pi} \frac{|\Theta_*(e^{-iu})|^2}{|\Phi_*(e^{-iu})|^2} = f_{X_*}(u),$$

où on a utilisé $|1 - c^{-1} e^{-iu}| = |c|^{-1} |c - e^{-iu}| = |c|^{-1} |e^{iu} c - 1| = |c|^{-1} |1 - \overline{c} e^{-iu}|$ pour déplacer les racines de l'intérieur vers l'extérieur du disque unité, sans perturber la valeur du module. Il en découle que $\gamma_X = \gamma_{X_*}$ car l'autocovariance n'est rien d'autre que la suite des coefficients de Fourier de la mesure spectrale.

Examen de rattrapage

Durée : 2 heures
Date : lundi 1er septembre 2015
Conditions : sans calculatrice ni documents
Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Solution succincte de l'exercice 1 (ARMA$(1,1)$).

1. Une solution stationnaire existe (elle est alors unique, et c'est un processus linéaire) lorsque le polynôme $\Phi(z) = P_{\alpha_\phi}(z) = 1 - \phi z$ n'a pas de racine de module 1, c'est-à-dire lorsque $|\phi| \neq 1$ car Φ a une unique racine $z_1 = 1/\phi$ de module $1/|\phi|$;
2. La solution stationnaire est causale lorsque Φ n'a pas de racine de module ≤ 1, c'est-à-dire lorsque $|z_1| > 1$, autrement dit lorsque $|\phi| < 1$;
3. D'après un théorème du cours, la solution stationnaire X de l'équation ARMA $\Phi(B)X = \Theta(B)Z$ s'obtient en développant en série de puissances de z la fraction rationnelle de l'équation ARMA $z \mapsto \Theta(z)/\Phi(z) = (1+\theta z)/(1-\phi z)$ dans un voisinage du cercle unité $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. On distingue les cas $|\phi| < 1$ et $|\phi| > 1$.
   Cas $|\phi| < 1$. Si $|z| = 1$ alors $|\phi z| < 1$ et $1/(1-\phi z) = \sum_{k=0}^\infty \phi^k z^k$, d'où
   $$\frac{1+\theta z}{1-\phi z} = \sum_{k=0}^\infty \phi^k z^k + \theta z \sum_{k=0}^\infty \phi^k z^k = 1 + \sum_{k=1}^\infty \phi^{k-1}(\phi+\theta) z^k$$
   d'où
   $$\psi_k = \mathbf{1}_{h=0} + \phi^{k-1}(\phi+\theta)\mathbf{1}_{h>0}.$$
   Cas $|\phi| > 1$. Si $|z| = 1$ alors $|(\phi z)^{-1}| < 1$ et
   $$\frac{1}{1-\phi z} = -\frac{1}{\phi z}\frac{1}{1-(\phi z)^{-1}} = -\frac{1}{\phi z}\sum_{k=0}^\infty \phi^{-k} z^{-k} = -\sum_{k=1}^\infty \phi^{-k} z^{-k}.$$
   et donc
   $$\frac{1+\theta z}{1-\phi z} = -\sum_{k=1}^\infty \phi^{-k} z^{-k} - \theta z \sum_{k=1}^\infty \phi^{-k} z^{-k} = -\theta\phi^{-1} + \sum_{k=1}^\infty \phi^{-k-1}(\phi+\theta) z^{-k}$$
   d'où
   $$\psi_k = -\theta\phi^{-1}\mathbf{1}_{k=0} + \phi^{-k-1}(\phi+\theta)\mathbf{1}_{k<0}.$$
   Dans les deux cas, $F_\phi^{-1} \circ F_\theta = F_\psi$, pour tout $t \in \mathbb{Z}$,
   $$X_t = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_k Z_{t-k},$$
   et la convergence a lieu p.s. et dans L^2. On retrouve bien $X = Z$ si $\theta = -\phi$.
4. Pour tout $h \in \mathbb{Z}$, comme $\gamma_Z(h) = \sigma^2 \mathbf{1}_{h=0}$,
   $$\gamma_X(h) = \gamma_{F_\psi Z}(h) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \psi_j \psi_k \gamma_Z(h+j-k) = \sigma^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_j \psi_{h+j}$$
   Cette formule permet d'établir que $\gamma_X(h)$ décroît géométriquement (exponentielle) quand $|h| \to \infty$, en utilisant le fait que ψ_k décroît géométriquement quand $|k| \to \infty$, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ et $0 < \rho < 1$ tels que $|\gamma_X(h)| \leq C\rho^{|h|}$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$.

Solution succincte de l'exercice 2 (Estimation de la moyenne et intervalle de confiance pour un AR(1))**.**

1. Comme $|\phi| < 1$, le processus stationnaire X solution de l'équation AR(1) est un filtre causal du bruit blanc fort gaussien Z, et par conséquent, d'après un théorème du cours, on dispose du théorème de la limite centrale suivant :
$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,\gamma)$$
où $\gamma = 2\pi f_X(0)$ et où f_X est la densité spectrale de X, qui est donnée ici par $f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{1}{|1-\varphi e^{-i\lambda}|^2}$ pour tout $\lambda \in [-\pi,\pi]$, d'où enfin $\gamma = 2\pi f_X(0) = \sigma^2/(1-\varphi)^2$. On peut mener le calcul de la variance asymptotique directement :
$$\begin{aligned} n\mathrm{Var}(\widehat{\theta}) &= \frac{1}{n}\sum_{0\leq i,j\leq n-1}\gamma_X(j-i) \\ &= \sum_{h=-(n-1)}^{n-1}\frac{n-h}{n}\gamma_X(h) \\ &= \sum_{h=-(n-1)}^{n-1}\left(1-\frac{h}{n}\right)\gamma_X(h) \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{\text{CVD}} \sum_{h\in\mathbb{Z}}\gamma_X(h) \\ &= \sum_{h\in\mathbb{Z}}e^{-ih\lambda}\gamma_X(h)\Big|_{\lambda=0} \\ &= 2\pi f_X(0). \end{aligned}$$

2. La convergence en loi précédente permet de construire un intervalle de confiance asymptotique $I_{n,\alpha}$ suivant de niveau de confiance $1-\alpha$. En effet, on écrit
$$\mathbb{P}\left(\theta \in \widehat{\theta} - \sqrt{\frac{\gamma}{n}}J_\alpha\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\gamma}}(\widehat{\theta}-\theta) \in J_\alpha\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(Z \in J_\alpha) = 1-\alpha$$
où $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $J_\alpha = [-q_{1-\alpha/2}, q_{1-\alpha/2}]$ où q_p est le quantile d'ordre p de $\mathcal{N}(0,1)$ c'est-à-dire $\mathbb{P}(Z \leq q_p) = p$, ce qui donne
$$I_{n,\alpha} = \left[\widehat{\theta} - \sqrt{\frac{\gamma}{n}}q_{1-\alpha/2}, \widehat{\theta} + \sqrt{\frac{\gamma}{n}}q_{1-\alpha/2}\right]$$
Cet intervalle de confiance permet de tester l'hypothèse statistique H_0 :«$\theta = 0$» contre l'hypothèse alternative H_1 :«$\theta \neq 0$». Pour $\alpha = 5\%$ on a $q_{1-\alpha/2} \approx 1.96$, ce qui donne avec les valeurs fournies pour n et $\widehat{\theta}$ l'intervalle $[-0.39, 0.59]$. Comme 0 appartient à cet intervalle, on accepte H_0 avec un niveau de confiance de 5% ;

3. Un théorème du cours affirme que Γ_n est inversible pour tout n si et seulement si $\gamma_X(h) \to 0$ quand $h \to \infty$, ce qui est le cas pour les processus ARMA(p,q) ;

4. Si $X^{(n)} = (X_0,\ldots,X_{n-1})$ alors $\mathrm{Cov}(X^{(n)}) = \mathrm{Cov}(Y^{(n)}) = \Gamma_n$, d'où
$$\widetilde{Y}_n^{(n)} := \Gamma_n^{-1/2}Y^{(n)} = \theta\Gamma_n^{-1/2}\mathbf{1}_n + \Gamma_n^{-1/2}X^{(n)} = \theta A + Z^{(n)}$$
où $Z^{(n)} = \Gamma_n^{-1/2}X^{(n)}$ vérifie $\mathrm{Cov}(Z^{(n)}) = I_n$. On a donc
$$(A^\top A)^{-1}A\widetilde{Y}_n^{(n)} = (\mathbf{1}_n^\top\Gamma_n^{-1/2}\Gamma_n^{-1/2}\mathbf{1}_n)^{-1}\mathbf{1}_n^\top\Gamma_n^{-1/2}\Gamma_n^{-1/2}Y^{(n)} = \widetilde{\theta}_n.$$
Il s'agit donc tout simplement d'un estimateur par projection orthogonale obtenu par moindres carrés $\min_\theta \|\theta A - \widetilde{Y}_n^{(n)}\|$, bien connu pour le modèle linéaire ;

5. On a $\mathbb{E}(\widetilde{\theta}_n) = (\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n)^{-1}(\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n)\theta = \theta$ et

$$\mathbb{E}((\widetilde{\theta}_n)^2) = \frac{1}{(\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n)^2}\mathbb{E}((\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} Y^{(n)})^2).$$

   Or comme $\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} Y^{(n)} = (\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} Y^{(n)})^\top = Y^{(n)\top}\Gamma_n^{-1}\mathbf{1}_n$ (il s'agit d'un réel), on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} Y^{(n)})^2) &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1} Y^{(n)} Y^{(n)\top}\Gamma_n^{-1}\mathbf{1}_n) \\ &= \mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1}\mathbb{E}(Y^{(n)} Y^{(n)\top})\Gamma_n^{-1}\mathbf{1}_n \\ &= \mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1}(\Gamma_n + \theta \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^\top)\Gamma_n^{-1}\mathbf{1}_n \\ &= \mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1}\mathbf{1}_n + \theta(\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1}\mathbf{1}_n)^2\end{aligned}$$

   d'où

$$\mathrm{Var}(\widetilde{\theta}_n) = \frac{1}{\mathbf{1}_n \Gamma_n^{-1}\mathbf{1}_n}.$$

6. La décomposition de Cholesky donne, en observant que $\Phi_n \mathbf{1}_n = (1-\phi, \ldots, 1-\phi, 1)^\top$,

$$\mathbf{1}_n^\top \Gamma_n^{-1}\mathbf{1}_n = (\Phi_n \mathbf{1}_n)^\top D_n \Phi_n \mathbf{1}_n = (1-\phi)^2 \frac{1-\phi^2}{\sigma^2} + (n-2)(1-\phi)^2\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^2},$$

   d'où

$$n\mathrm{Var}(\widetilde{\theta}_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\sigma^2}{(1-\phi)^2}.$$

   Ainsi, les estimateurs $\widehat{\theta}_n$ et $\widetilde{\theta}_n$ sont asymptotiquement de même variance.

Examen partiel

Durée : 2 heures
Date : mercredi 4 novembre 2015 8h30-10h30
Conditions : sans calculatrice ni documents
Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Solution succincte de l'exercice 1. Proche d'un exercice du partiel de 2013-2014.

1. Par définition, X est un processus causal de Z ssi $\alpha_k = 0$ pour tout $k < 0$. D'autre part, par définition, $X = F_\alpha Z$ est inversible ssi il existe $\beta \in \ell^1(\mathbb{Z})$ tel que $Z = F_\beta X$ est un processus causal de X c'est-à-dire que $\beta_k = 0$ si $k < 0$. Si $X = F_\alpha Z$ est à la fois causal et inversible alors $Z = F_\beta X = F_\beta F_\alpha Z = F_{\beta * \alpha} Z$ d'où $\beta = \alpha^{-1}$. Ainsi, un filtre α d'un BB est à la fois causal et inversible ssi α est à support dans $\mathbb{N}$ et admet un inverse (pour le produit de convolution dans $\ell^1(\mathbb{Z})$) à support dans $\mathbb{N}$;
2. L'opérateur $(1-B)^{n+1} = \Delta^{n+1}$ élimine toute tendance polynomiale de degré au plus n, d'où $\Delta^2 Z_t = \Delta(Z_t - Z_{t-1}) = Z_t - 2Z_{t-1} + Z_{t-2}$, ou encore, avec $n = 1$,
$$(1-B)^{n+1}(1+t+Z_t) = (1-B)^{n+1}Z_t = (1-2B+B^2)Z_t = Z_t - 2Z_{t-1} + Z_{t-2};$$
3. Exercice vu en travaux dirigés. Pour tous $t, h \in \mathbb{Z}$, on a
$$\mu_{XY}(t) = \mathbb{E}(X_t Y_t) = \mathbb{E}(X_t)\mathbb{E}(Y_t) = \mu_X(t)\mu_Y(t) = \mu_X \mu_Y$$
grâce à l'indépendance et à la stationnarité de X et Y, et
$$\begin{aligned}\gamma_{XY}(t, t+h) &= \mathbb{E}(X_{t+h}Y_{t+h}X_tY_t) - (\mu_X\mu_Y)^2 \\ &= \mathbb{E}(X_{t+h}X_t)\mathbb{E}(Y_{t+h}Y_t) - \mu_X^2\mu_Y^2 \\ &= \gamma_X(h) + \mu_X^2 + \gamma_Y(h) + \mu_Y^2 - \mu_X^2\mu_Y^2,\end{aligned}$$
qui ne dépendent pas de t, d'où la stationnarité de XY ;
4. Soit $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$ un MA(1). La moyenne est nulle et l'autocovariance est
$$\gamma_X(h) = \mathbb{E}(X_tX_{t+h}) = \mathbb{E}((Z_t + \theta Z_{t-1})(Z_{t+h} + \theta Z_{t+h-1})) = \sigma^2(1+\theta^2)\mathbf{1}_{h=0} + \theta\sigma^2\mathbf{1}_{h=\pm 1}$$
Comme $\gamma_X \in \ell^1(\mathbb{Z})$, le théorème de Herglotz affirme que γ_X est la transformée de Fourier d'une mesure positive finie de densité donnée pour tout $u \in [-\pi, \pi]$ par
$$f(u) = \frac{1}{2\pi}\sum_{h\in\mathbb{Z}} \gamma_X(h)e^{-ihu} = \frac{\sigma^2}{2\pi}(1+\theta^2+\theta(e^{-iu}+e^{+iu})) = \frac{\sigma^2}{2\pi}(1+\theta^2+2\theta\cos(u)).$$

Solution succincte de l'exercice 2. Tiré de l'examen de rattrapage de 2014-2015.

1. Une solution stationnaire existe (elle est alors unique, et c'est un processus linéaire) lorsque le polynôme $\Phi(z) = P_{\alpha_\phi}(z) = 1 - \phi z$ n'a pas de racine de module 1, c'est-à-dire lorsque $|\phi| \neq 1$ car Φ a une unique racine $z_1 = 1/\phi$ de module $1/|\phi|$;
2. La solution stationnaire est causale lorsque Φ n'a pas de racine de module ≤ 1, c'est-à-dire lorsque $|z_1| > 1$, autrement dit lorsque $|\phi| < 1$;

3. D'après un théorème du cours, la solution stationnaire X de l'équation ARMA $\Phi(B)X = \Theta(B)Z$ s'obtient en développant en série de puissances de z la fraction rationnelle de l'équation ARMA $z \mapsto \Theta(z)/\Phi(z) = (1+\theta z)/(1-\phi z)$ dans un voisinage du cercle unité $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. On distingue les cas $|\phi| < 1$ et $|\phi| > 1$.
   Cas $|\phi| < 1$. Si $|z| = 1$ alors $|\phi z| < 1$ et $1/(1-\phi z) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k z^k$, d'où
   $$\frac{1+\theta z}{1-\phi z} = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k z^k + \theta z \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k z^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \phi^{k-1}(\phi+\theta) z^k$$
   d'où
   $$\psi_k = \mathbf{1}_{h=0} + \phi^{k-1}(\phi+\theta)\mathbf{1}_{h>0}.$$
   Cas $|\phi| > 1$. Si $|z| = 1$ alors $|(\phi z)^{-1}| < 1$ et
   $$\frac{1}{1-\phi z} = -\frac{1}{\phi z}\frac{1}{1-(\phi z)^{-1}} = -\frac{1}{\phi z}\sum_{k=0}^{\infty} \phi^{-k} z^{-k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \phi^{-k} z^{-k}.$$
   et donc
   $$\frac{1+\theta z}{1-\phi z} = -\sum_{k=1}^{\infty} \phi^{-k} z^{-k} - \theta z \sum_{k=1}^{\infty} \phi^{-k} z^{-k} = -\theta\phi^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \phi^{-k-1}(\phi+\theta) z^{-k}$$
   d'où
   $$\psi_k = -\theta\phi^{-1}\mathbf{1}_{k=0} + \phi^{-k-1}(\phi+\theta)\mathbf{1}_{k<0}.$$
   Dans les deux cas, $F_\phi^{-1} \circ F_\theta = F_\psi$, pour tout $t \in \mathbb{Z}$,
   $$X_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k Z_{t-k},$$
   et la convergence a lieu p.s. et dans L^2. On retrouve bien $X = Z$ si $\theta = -\phi$.
4. Pour tout $h \in \mathbb{Z}$, comme $\gamma_Z(h) = \sigma^2 \mathbf{1}_{h=0}$,
   $$\gamma_X(h) = \gamma_{F_\psi Z}(h) = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \psi_j\psi_k\gamma_Z(h+j-k) = \sigma^2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \psi_j\psi_{h+j}$$
   Cette formule permet d'établir que $\gamma_X(h)$ décroît géométriquement (exponentielle) quand $|h| \to \infty$, en utilisant le fait que ψ_k décroît géométriquement quand $|k| \to \infty$, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ et $0 < \rho < 1$ tels que $|\gamma_X(h)| \le C\rho^{|h|}$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$.

Solution succincte de l'exercice 3.

1. Pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et tous $n, m \in \mathbb{N}$, la v.a.r. $X_{t,n,m} := \sum_{k=-n}^{m} \alpha_k Z_{t-k}$ est gaussienne de moyenne 0 et de variance
   $$\mathbb{E}(X_{t,n,m}^2) = \sum_{-n\le j,k\le m} \alpha_j\alpha_k \mathrm{Cov}(Z_{t-j}, Z_{t-k}) = \sum_{-n\le k\le m} \alpha_k^2 \mathrm{Var}(Z_{t-k}) = \sigma^2 \sum_{k=-n}^{m} \alpha_k^2$$
   car $Z \sim \mathrm{BB}(0,\sigma^2)$. Comme $X_{t,n,m}$ converge dans L^2 et donc en loi vers $(F_\alpha X)_t$ quand $n, m \to \infty$, il en découle que $(F_\alpha X)_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \|\alpha\|_2^2)$, car pour les suites de v.a.r. gaussiennes, la convergence en loi est équivalente à la convergence des moyennes et des variances et la limite est toujours gaussienne ;

2. Soit $\kappa := \mathbb{E}(Z_t^4)$ (valable pour tout $t \in \mathbb{Z}$). Pour tout $t \in \mathbb{Z}$ on a

$$M_t := \mathbb{E}((F_\alpha Z)_t^4) = \sum_{k_1,k_2,k_3,k_4 \in \mathbb{Z}} \alpha_{k_1}\alpha_{k_2}\alpha_{k_3}\alpha_{k_4}\mathbb{E}(Z_{t-k_1}Z_{t-k_2}Z_{t-k_3}Z_{t-k_4}).$$

Or si la suite finie k_1, k_2, k_3, k_4 comporte une valeur n'apparaissant qu'une fois alors par indépendance et centrage $\mathbb{E}(Z_{t-k_1}Z_{t-k_2}Z_{t-k_3}Z_{t-k_4}) = 0$. Il suffit donc de considérer le cas où deux valeurs distinctes $u \neq v$ apparaissent deux fois, qui donne $\mathbb{E}(Z_{t-k_1}Z_{t-k_2}Z_{t-k_3}Z_{t-k_4}) = \mathbb{E}(Z_{t-u}^2 Z_{t-v}^2) = \sigma^4$, et le cas où une seule valeur apparaît quatre fois ($k_1 = k_2 = k_3 = k_4$), qui donne $\mathbb{E}(Z_{t-k_1}Z_{t-k_2}Z_{t-k_3}Z_{t-k_4}) = \mathbb{E}(Z_{t-k_1}^4) = \kappa$.

$$\begin{aligned} M_t &= \sum_{\substack{u,v\in\mathbb{Z} \\ u<v}} \binom{4}{2}\alpha_u^2\alpha_v^2\sigma^4 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k^4 3\sigma^4 \\ &= 3\sigma^4(\|\alpha\|_2^4 - \|\alpha\|_4^4) + \kappa\,\|\alpha\|_4^4 \\ &= 3\sigma^4\,\|\alpha\|_2^4 + (\kappa - 3\sigma^4)\,\|\alpha\|_4^4 . \end{aligned}$$

Rappelons que $\ell^p \subset \ell^q$ si $1 \leq p \leq q \leq \infty$ et en particulier $\ell^1 \subset \ell^2 \subset \ell^4$.

Il est possible de vérifier la véracité du calcul dans le cas gaussien. En effet, comme le moment d'ordre 4 de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ vaut 3, il vient $\kappa = 3\sigma^4$ et donc $M_t = 3\sigma^4\,\|\alpha\|_2^4$, ce qui correspond bien au fait que dans le cas gaussien, M_t est le moment d'ordre 4 de la loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2\,\|\alpha\|_2^2)$ d'après la première question !

Université Paris-Dauphine — M1 MA 2015/2016 — Séries Temporelles

Examen final

Durée : 2 heures
Date : lundi 11 janvier 2016
Conditions : sans calculatrice ni documents
Note : il sera tenu compte de la qualité de la rédaction

Solution succincte de l'exercice 1.

1. On raisonne par l'absurde. Si X est solution stationnaire de l'équation, alors l'utilisation récursive de $X_t = \varphi X_{t-1} + Z_t + \theta Z_{t-1}$ donne, pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} X_t &= \varphi X_{t-1} + Z_t + \theta Z_{t-1} \\ &= \varphi(\varphi X_{t-2} + Z_{t-1} + \theta Z_{t-2}) + X_{t-1} + Z_t + \theta Z_{t-1} \\ &= \varphi^2 X_{t-2} + Z_t + (\varphi+\theta) Z_{t-1} + \varphi\theta Z_{t-2} \\ &\vdots \\ &= \varphi^n X_{t-n} + Z_t + \sum_{k=1}^{n-1} \varphi^{k-1}(\varphi+\theta) Z_{t-k} + \varphi^{n-1}\theta Z_{t-n}, \end{aligned}$$

d'où

$$X_t - \varphi^n X_{t-n} = Z_t + (\varphi+\theta)\sum_{k=1}^{n-1} \varphi^{k-1} Z_{t-k} + \varphi^{n-1}\theta Z_{t-n}$$

d'où, en calculant la variance des deux membres,

$$(1+\varphi^{2n})\gamma_X(0) - 2\varphi^n \gamma_X(n) = \sigma^2 + \sigma^2(\varphi+\theta)^2 \sum_{k=1}^{n-1} \varphi^{2(k-1)} + \sigma^2 \varphi^{2(n-1)}\theta^2,$$

or si $|\varphi| = 1$ et $\varphi + \theta \neq 0$ alors on obtient une contradiction lorsque $n \to \infty$: le membre de gauche reste borné tandis que le membre de droite tend vers l'infini. Il n'y a donc pas de solution stationnaire lorqu'à la fois $|\varphi| = 1$ et $\varphi + \theta \neq 0$.

2. Comme $\Phi(z) := 1 - \varphi z$ et $\Theta(z) := 1 + \theta z$ ne s'annulent pas sur le cercle unité, l'équation ARMA$(1,1)$ admet une unique solution stationnaire donnée par le filtre $X = F_{\alpha_\varphi^{-1}} F_{\alpha_\theta} Z = F_{\alpha_\theta} F_{\alpha_\varphi^{-1}} Z$. Or l'équation ARMA$(\infty,\infty)$ s'écrit $F_{\alpha_\theta^{-1}} X = F_{\alpha_\varphi^{-1}} Z$;

3. On a $\Phi(z) = 1 - z^2/4$ dont les racines sont ± 2 et $\Theta(z) = 1 + z/2$ dont l'unique racine est $z = -2$. Comme Φ ne s'annule pas sur le cercle unité, l'équation ARMA$(2,1)$ admet donc une unique solution stationnaire donnée par $f(B)Z$ où

$$f(z) = \frac{\Theta(z)}{\Phi(z)} = \frac{2}{2-z} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} z^k$$

(convergence absolue pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$). Elle est manifestement causale, et cela est dû au fait que Φ ne s'annule pas sur le disque unité. Comme Θ ne s'annule pas sur le disque unité fermé, cette solution est de plus inversible. Le processus $Y_t = X_t + c2^{-t}$ est une solution non stationnaire, pour tout $c \neq 0$ fixé.

4. Comme Φ ne s'annule pas sur le disque unité fermé, l'équation ARMA(p,q) possède une unique solution stationnaire, qui est causale, et il s'agit donc de X. De plus $X = f(B)Z$ où $f(z) = \Theta(z)/\Phi(z)$. La causalité fait que $1/\Phi(z)$ et donc $f(z)$ est une

somme finie de séries de puissances positives c'est-à-dire que $f(z) = \sum_{k\geq 0} \alpha_k z^k$ où $\alpha_k = \sum_{j=1}^m c_j \kappa_j^k$ avec $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ et $\kappa_1, \dots, \kappa_m \in]-1, 1[$. En particulier, en posant $c := |c_1| + \cdots + |c_m|$ et $\kappa := \max(|\kappa_1|, \dots, |\kappa_m|) \in]0, 1[$, il vient, pour tout $k \geq 0$,

$$|\alpha_k| \leq c\kappa^k.$$

À présent pour tout $h \geq 0$,

$$\gamma_X(-h) = \gamma_X(h) = \sum_{j,k\geq 0} \alpha_j \alpha_k \gamma_Z(h+k-j) = \sigma^2 \sum_{k\geq 0} \alpha_k \alpha_{h+k}$$

ce qui donne, pour tout $h \geq 0$,

$$|\gamma_X(h)| \leq \sigma^2 c \sum_{k\geq 0} \kappa^{2k+h} = c\sigma^2 \frac{\kappa^h}{1-\kappa^2} = C\kappa^h = Ce^{-ch}.$$

5. Pour tous $t, h \in \mathbb{Z}$, on a

$$\mu_X(t) = \mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(Y) = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_X(t, t+h) = \mathbb{E}(X_{t+h}X_t) = \mathbb{E}(Y^2) = 1,$$

qui ne dépendent pas de t, et donc le processus est stationnaire. De plus pour tout $t \in \mathbb{Z}$ on a $\gamma_X(t) = 1$. Le processus est solution de l'équation $X_{t-1} = X_t$ qui est une équation ARMA$(1, q)$ dégénérée avec un bruit blanc de variance nulle.

6. Comme $\gamma_X \in \ell^1(\mathbb{Z})$, le théorème de Herglotz affirme que la mesure spectrale ν_X de X admet une densité spectrale f_X donnée pour tout $u \in [-\pi, \pi]$ par la formule $f_X(u) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h\in\mathbb{Z}} e^{-ihu} \gamma_X(h)$. À présent, par convergence dominée,

$$n\text{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{j,k=1}^n \gamma_X(j-k) = \sum_{h=-n+1}^{n-1} \frac{n-|h|}{n}\gamma_X(h) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{h\in\mathbb{Z}} \gamma_X(h) = 2\pi f_X(0).$$

Solution succincte de l'exercice 2.

1. On a

$$H_{t-1,p+1} = H_{t-1,p} \overset{\perp}{\oplus} \text{vect}\{E^-_{t-(p+1),p}\}$$

d'où

$$\text{proj}(X_t, H_{t-1,p+1}) = \text{proj}(X_t, H_{t-1,p}) + \text{proj}(X_t, \text{vect}\{E^-_{t-(p+1),p}\})$$

or

$$\text{proj}(X_t, \text{vect}\{E^-_{t-(p+1),p}\}) = \kappa_{p+1} E^-_{t-(p+1),p} \quad \text{où} \quad \kappa_{p+1} := \frac{\left\langle X_t\,,\, E^-_{t-(p+1),p}\right\rangle}{\left\|E^-_{t-(p+1),p}\right\|_2^2};$$

2. Comme $X_t = E^+_{t,p} + \text{proj}(X_t, H_{t-1,p})$, et $\text{proj}(X_t, H_{t-1,p}) \in H_{t-1,p} \perp E^-_{t-(p+1),p}$, il vient

$$\kappa_{p+1} = \frac{\left\langle X_t, E^-_{t-(p+1),p}\right\rangle}{\left\|E^-_{t-(p+1),p}\right\|_2^2} = \frac{\left\langle E^+_{t,p}, E^-_{t-(p+1),p}\right\rangle}{\left\|E^-_{t-(p+1),p}\right\|_2^2}.$$

Enfin $\left\|E^+_{t,p}\right\|_2^2 = \left\|E^-_{t-(p+1),p}\right\|_2^2 \quad (= \sigma_p^2)$ d'où la formule attendue. Comme cette quantité est une corrélation, elle appartient à l'intervalle $[-1, 1]$ (inégalité de Schwarz).

Solution succincte de l'exercice 3.

1. Par analogie avec le cas scalaire ($d = 1$) on aimerait poser

$$X_t = \sum_{k\geq 0} \Phi^k Z_{t-k}.$$

C'est une série dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega \to \mathbb{R}^d)$ dont la norme $\|Y\|_{L^2} := \mathbb{E}(\|Y\|_2^2)^{1/2}$ dérive du produit scalaire $\mathbb{E}(X \cdot Y)$. Elle converge absolument car

$$\|\sum_{k\geq 0} \Phi^k Z_{t-k}\|_{L^2} \leq \sum_{k\geq 0} \|\Phi^k\|_{2\to 2}\|Z_{t-k}\|_{L^2} \leq \sum_{k\geq 0} \|\Phi\|_{2\to 2}^k \sqrt{d\sigma^2} = \frac{\sqrt{d}\sigma}{1-\|\Phi\|_{2\to 2}},$$

où on a utilisé l'inégalité triangulaire pour la norme de L^2, la sous-multiplicativité de la norme de matrice puis le fait que $\|Z_t\|_{L^2}^2 = \sum_{j=1}^d \mathbb{E}(Z_{t,j}^2) = d\sigma^2$. Le processus X est donc bien défini dans L^2. Il est bien solution de l'équation AR(1) vectorielle car par continuité de l'application linéaire $Y \in L^2 \mapsto \Phi Y \in L^2$, on a

$$\Phi X_{t-1} = \sum_{k\geq 0} \Phi^{k+1} Z_{t-1-k} = \sum_{k\geq 1} \Phi^k Z_{t-k} = X_t - Z_t.$$

Notons que X a une norme constante en ce sens que pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\|X_t\|_{L^2}^2 = \mathbb{E}\Big(\sum_{j,k\geq 0} \Phi^j Z_{t-j} \cdot \Phi^k \cdot Z_{t-k}\Big) &= \sum_{j,k\geq 0} \sum_{u,v,w=1}^d \Phi_{u,v}^j \Phi_{u,w}^k \mathbb{E}(Z_{t-j,v} Z_{t-k,w}) \\ &= \sigma^2 \sum_{k\geq 0} \sum_{u,v}^d (\Phi_{u,v}^k)^2 \\ &= \sigma^2 \sum_{k\geq 0} \mathrm{Tr}(\Phi^k (\Phi^k)^\top).\end{aligned}$$

Si X' est une solution de l'équation dans L^2, de norme constante, alors

$$X'_t = Z_t + \Phi X'_{t-1} = \cdots = \sum_{k=0}^n \Phi^k Z_{t-k} + \Phi^{n+1} X'_{t-(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \sum_{k\geq 0} \Phi^k Z_{t-k} = X_t$$

car $\|\Phi^{n+1} X'_{t-(n+1)}\|_{L^2} \leq \|\Phi\|_{2\to 2}^{n+1} \|X'_{t-(n+1)}\|_{L^2} = \|\Phi\|_{2\to 2}^{n+1} \|X'_0\|_{L^2} = o(1)$ et il y a donc unicité parmi les solutions dans L^2 de norme constante.

2. Si les processus $(Z_{t,1})_{t\in\mathbb{Z}}, \ldots, (Z_{t,d})_{t\in\mathbb{Z}}$ sont indépendants et si Φ est diagonale, alors les processus $(X_{t,1})_{t\in\mathbb{Z}}, \ldots, (X_{t,d})_{t\in\mathbb{Z}}$ sont des AR(1) indépendants de coefficients respectifs $\Phi_{1,1}, \ldots, \Phi_{d,d}$ car dans ce cas $\Phi^k Z_{t-k} = (\Phi_{1,1}^k Z_{t-k,1}, \ldots, \Phi_{d,d}^k Z_{t-k,d})^\top$.

Examen de rattrapage

Durée : 2 heures
Date : vendredi 15 juillet 2016
Conditions : sans calculatrice ni documents
Note :

— Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction
— Les surveillants ne répondront à aucune question sur le sujet
— Si vous avez des commentaires à faire, faites le sur votre copie
— Ce sujet reprend des éléments des sujets des années antérieures

Solution succincte de l'exercice 1.

1. Comme $t \mapsto \cos((2/3)\pi t)$ est de période 3, on a $\Delta_3 S_t = 0 + \Delta_3 Z_t = Z_t - Z_{t-3}$;
2. Comme les v.a.r. $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sont indépendantes, de carré intégrable, de même moyenne et variance, il s'agit bien d'un bruit blanc fort. La moyenne vaut 0 car les variables sont centrées, et la variance vaut 1 car les variables sont réduites ;
3. Les v.a.r. $(Z_t^p)_{t\in\mathbb{Z}}$ sont indépendantes, de carré intégrable, de même moyenne et variance : il s'agit donc d'un bruit blanc fort. Pour tout $h \in \mathbb{Z}$ on a $\mu(h) = \mathbb{E}(Z_0^p)$ ($= 0$ si p impair) et $\gamma(h) = (\mathbb{E}(Z_0^{2p}) - \mathbb{E}(Z_0^p)^2)\mathbf{1}_{h=0}$;
4. $\gamma_X(h) = 0$ si $|h| > 2$, et $\gamma_X(0) = \mathrm{Var}(aZ_{-1} + bZ_1) = a^2 + b^2$, $\gamma_X(-1) = \gamma_X(1) = \mathrm{E}((aZ_0 + bZ_2)(aZ_1 + bZ_3)) = 0$, et $\gamma_X(-2) = \gamma_X(2) = \mathrm{E}(bZ_2 aZ_2) = ab$.
5. X est causal ssi X_t ne dépend que de $(Z_s)_{s\leq t}$, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, ce qui a lieu si $b = 0$. Le filtre X de Z est inversible ssi Z est un filtre causal de X, ce qui a lieu si $a = 0$.

Solution succincte de l'exercice 2.

1. On a $X_t = \sum_{k=0}^n \varphi^k Z_{t-k} + \varphi^{n+1} X_{t-(n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $|\varphi| < 1$ alors le premier terme du membre de droite est une série absolument convergence dans L^2 (et p.s.) ce qui suggère que $X_t = \sum_{k=0}^n \varphi^k Z_{t-k}$ est solution, ce qui se vérifie directement. Lorsque $|\varphi| > 1$ on procède de même en renversant le temps à partir de l'équation $X_{t-1} = \varphi^{-1} X_t - \varphi^{-1} Z_t$, ce qui conduit à la solution non-causale $X_t = -\sum_{k=1}^\infty \varphi^{-k} Z_{t+k}$. Lorsque $|\varphi| = 1$ alors il ne peut pas exister de solution stationnaire car sinon l'équation $\sum_{k=0}^n \varphi^k Z_{t-k} = X_t - \varphi^{n+1} X_{t-(n+1)}$ donnerait en prenant la variance $(n+1)\sigma^2 \leq 4\gamma_X(0)$ ce qui est impossible lorsque $n \gg 1$;
2. $X = F_\alpha Z$ avec $\alpha_k = \varphi^k \mathbf{1}_{k\in\mathbb{N}}$ donc pour tout $h \in \mathbb{N}$,

$$\gamma_X(-h) = \gamma_X(h) = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \alpha_j \alpha_k \gamma_Z(h + j - k) = \sigma^2 \sum_{j\geq 0} \varphi^{2j+h} = \sigma^2 \frac{\varphi^h}{1 - \varphi^2}.$$

Pour la densité spectrale, on écrit, pour tout $t \in [-\pi, \pi]$,

$$f_X(t) = |P_\alpha(e^{-itj})|^2 f_Z(t) = \left|\sum_{j\in\mathbb{N}} \varphi^j e^{-itj}\right|^2 \frac{\sigma^2}{2\pi} = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left|\frac{1}{1 - \varphi e^{-it}}\right|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{1 - 2\varphi\cos(t) + \varphi^2}.$$

3. L'équation s'écrit sous forme standard

$$X_t = \frac{1}{2} X_{t-1} + Z_t + \frac{1}{2} Z_{t-1}$$

et donc $\Phi(z) = P_{\alpha_\varphi}(z) = 1 - z/2$ et $\Theta(z) = P_{\alpha_\theta}(z) = 1 + z/2$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$, on a $|z/2| < 1$ et donc $\frac{1}{\Phi(z)} = \frac{1}{1-z/2} = \sum_{k=0}^{\infty}(z/2)^k$ d'où

$$\frac{\Theta(z)}{\Phi(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}z^k + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}z^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1}z^k.$$

Cela donne la solution causale $X_t = Z_t + \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1}Z_{t-k}$;

4. On a $X = F_\psi Z$ où $\psi_k = \mathbf{1}_{k=0} + \mathbf{1}_{k>0}2^{-k+1}$. Or pour tout $h \geq 0$,

$$\gamma_X(-h) = \gamma_X(h) = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \psi_j\psi_k\gamma_Z(h+j-k) = \sigma^2\sum_{j\geq 0}\psi_j\psi_{h+j}$$

car $\gamma_Z = \sigma^2\mathbf{1}_0$. Comme $|\psi_k| \leq 2\rho^k$ pour tout $k \geq 0$, avec $\rho = 1/2$, on obtient

$$\left|\sigma^2\sum_{j\geq 0}\psi_j\psi_{h+j}\right| \leq \sigma^2 2\rho^h\sum_{j\geq 0}\rho^{2j} = \sigma^2 2\rho^h\frac{1}{1-\rho^2} = C\rho^h.$$

5. Prenons $\alpha_k = k^{-a}\mathbf{1}_{k\geq 1}$ pour $a > 1$, de sorte que $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Pour tout $h \geq 0$, on a

$$\gamma_X(-h) = \gamma_X(h) = \sigma^2\sum_{k\geq 1}\frac{1}{(k(k+h))^a} \geq \sigma^2\int_1^\infty \frac{dx}{(x+h)^{2a}} = \frac{\sigma^2}{(2a-1)(1+h)^{2a-1}},$$

qui décroît polynomialement et non pas exponentiellement quand $|h| \to \infty$.

Solution succincte de l'exercice 3.

1. On a $\Phi(z) = (1 - z + (1/4)z^2) = (z-2)^2/4$ et $\Theta(z) = 1 - z/2 = -(z-2)/2$ dont l'unique racine est 2 (elle est double pour Φ). Comme Φ ne s'annule pas sur le cercle unité, l'équation ARMA possède une unique solution stationnaire notée X, processus linéaire de Z. Comme de plus Φ ne s'annule pas sur le disque unité, X est causale. Comme Θ ne s'annule pas sur le disque unité fermé, X est inversible. Le calcul de X se fait en développant en série de puissances la fraction rationnelle de l'ARMA, dans un voisinage du cercle unité. Ici $|z| = 1$ implique que $|z/2| < 1$ ce qui permet le développement en série géométrique suivant :

$$\frac{\Theta(z)}{\Phi(z)} = -\frac{4(z-2)}{2(z-2)^2} = \frac{2}{2-z} = \frac{1}{1-z/2} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}z^k.$$

d'où, en posant $\alpha_k = 2^{-k}\mathbf{1}_{k\geq 0}$,

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}Z_{t-k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\alpha_k Z_{t-k}$$

Elle est manifestement causale. On vérifie facilement directement qu'il s'agit bien d'une solution de l'équation irréductible $X_t - (1/2)X_{t-1} = Z_t$ qui est AR(1) :

$$X_t - (1/2)X_{t-1} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}Z_{t-k} - \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(k+1)}Z_{t-1-k} = Z_t.$$

La solution est manifestement inversible car on a

$$Z_t = (\Phi/\Theta)(B)X_t = (1 - B/2)X_t = X_t - (1/2)X_{t-1};$$

2. Pour tout $h \geq 0$ on a

$$\gamma_X(h) = \gamma_{F_\alpha Z}(h) = \sigma^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \alpha_{k+h} = \sigma^2 \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2k-h} = \sigma^2 2^{-h} \sum_{k=0}^{\infty} 4^{-k} = \frac{4}{3}\frac{\sigma^2}{2^h}.$$

Donc $\gamma_X(h) = (4/3)\sigma^2 2^{-|h|}$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$. On a $H_{t-1,1} = \mathrm{vect}\{X_{t-1}\}$ d'où

$$\mathrm{proj}(X_s, H_{t-1,1}) = \frac{\langle X_s, X_{t-1}\rangle}{\|X_{t-1}\|^2} X_{t-1} = \frac{\gamma_X(s-t+1)}{\gamma_X(0)} X_{t-1} = 2^{-|s-t-1|} X_{t-1}.$$

Cette variable aléatoire tend presque sûrement vers 0 quand $s \to \infty$.

3. Un calcul (à faire !) montre que $\mathrm{Var}(\sqrt{n}\overline{X}_n) \to \sigma^2 \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k\right)^2 = 4\sigma^2$ quand $n \to \infty$. Comme Z est un BB fort gaussien, la variable $\sqrt{n}\overline{X}_n$ est gaussienne. Comme sa moyenne est nulle et sa variance converge vers $4\sigma^2$, elle converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 4\sigma^2)$. Cette propriété permet de mettre en place un test pour savoir si le bruit blanc est fort (elle reste vraie si le bruit blanc est fort mais pas gaussien).

Solution succincte de l'exercice 4.

1. Les polynômes Φ_* et Θ_* ont pour racines respectives

$$\frac{1}{\overline{a_1}}, \ldots, \frac{1}{\overline{a_r}}, a_{r+1}, \ldots, a_p \quad \text{et} \quad \frac{1}{\overline{b_1}}, \ldots, \frac{1}{\overline{b_s}}, b_{s+1}, \ldots, b_q,$$

qui sont toutes à l'extérieur du disque unité : l'application $z \mapsto 1/\overline{z}$ conserve l'argument et inverse le module. Donc l'équation ARMA(p,q) $\Phi_*(B)X_* = \Theta_*(B)X_*$ possède une unique solution stationnaire notée X_*. À présent, comme Φ_* et Θ_* ne s'annulent pas sur le disque unité fermé, le processus ARMA(p,q) X_* est causal et inversible ;

2. Par définition, on a

$$\Phi(z) = 1 - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j z^j = -\varphi_p \prod_{j=1}^{p} (z - a_j) \quad \text{et} \quad \Theta(z) = 1 + \sum_{j=1}^{q} \theta_j z^j = \theta_q \prod_{j=1}^{q} (z - b_j).$$

Comme $\Phi(0) = \Theta(0) = 1$, on a $|a_1 \cdots a_p \varphi_p| = |b_1 \cdots b_q \theta_q| = 1$, et

$$|\Phi(z)| = \prod_{j=1}^{p} \left| \frac{z - a_j}{a_j} \right| = \prod_{j=1}^{p} \left|1 - a_j^{-1} z\right| \quad \text{et} \quad |\Theta(z)| = \prod_{j=1}^{q} \left| \frac{z - b_j}{b_j} \right| = \prod_{j=1}^{q} \left|1 - b_j^{-1} z\right|.$$

Il en découle que pour tout $u \in [-\pi, \pi]$,

$$f_X(u) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{|P_\theta(e^{-iu})|^2}{|P_\varphi(e^{-iu})|^2} = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{\prod_{j=1}^{q} \left|1 - b_j^{-1} e^{-iu}\right|^2}{\prod_{j=1}^{p} \left|1 - a_j^{-1} e^{-iu}\right|^2} = \frac{\sigma_*^2}{2\pi} \frac{|\Theta_*(e^{-iu})|^2}{|\Phi_*(e^{-iu})|^2} = f_{X_*}(u),$$

où on a utilisé $|1 - c^{-1} e^{-iu}| = |c|^{-1} |c - e^{-iu}| = |c|^{-1} |e^{iu} c - 1| = |c|^{-1} |1 - \overline{c} e^{-iu}|$ pour déplacer les racines de l'intérieur vers l'extérieur du disque unité, sans perturber la valeur du module. Il en découle que $\gamma_X = \gamma_{X_*}$ car l'autocovariance n'est rien d'autre que la suite des coefficients de Fourier de la mesure spectrale.

English version