# Feuille de TP n°4
# Calcul approché d'intégrales – Méthodes de Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo permet le calcul de valeurs approchées d'intégrales multiples dont le calcul purement algébrique est impossible ou très difficile. Le fondement de la méthode repose sur la Loi des Grands Nombres (LGN) et le calcul de l'erreur associée à la méthode s'obtient à partir du Théorème Limite Centrale (TLC). On cherche à évaluer une intégrale multiple de la forme

$$I = \int_A f(x)\,dx$$

où $A$ est un pavé de $\mathbf{R}^d$ avec $d \geqslant 1$ de mesure de Lebesgue connue $m_A$ et $f$ est une fonction mesurable de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}$, intégrable sur $A$. Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $A$. On a par la LGN

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} I_A.$$

avec $I_A = I/m_A$. De plus, si $f$ est de carré intégrable sur $A$, on a par le TLC

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) - I_A\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\sigma^2)$$

avec

$$\sigma^2 = \frac{1}{m_A}\int_A f^2(x)\,dx - I_A^2.$$

On a donc un intervalle de confiance pour $I_A$ donné, avec un niveau de confiance de 95%, par

$$I_A \in \left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) - \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}\,,\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) + \frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Ce résultat n'a d'intérêt que si l'on sait majorer convenablement $\sigma^2$. Toutefois, si $\sigma^2$ est difficile à majorer, on peut l'estimer par la variance empirique

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(f(X_k) - \overline{f(X)})^2 \text{ avec } \overline{f(X)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k).$$

On peut montrer que $S_n^2$ converge en probabilité vers $\sigma^2$ et l'intervalle de confiance ci-dessus reste encore valable en remplaçant $\sigma$ par $S_n$. Finalement, on obtient un erreur d'approximation de l'ordre de $1/\sqrt{n}$. Cette vitesse est assez lente, comparée aux méthodes déterministes classiques, en particulier pour $d = 1$. En effet, si $d = 1$, alors l'erreur d'approximation de la méthode des rectangles ou du point central est de l'ordre de $1/n$. Pour la méthode des trapèzes, elle est en $1/n^2$ et pour la méthode de Simpson en $1/n^4$. La méthode de Monte-Carlo est intéressante si $d \geqslant 3$ ou bien si $f$ est très irrégulière car on peut observer qu'elle ne demande aucune hypothèse de régularité sur $f$.

## 1 Exercices

**Exercice 1.1.** On cherche à évaluer, pour tout $a > 0$, l'intégrale

$$I(a) = \int_0^a \exp(-x^2)\,dx.$$

Créer un code Matlab permettant d'évaluer $I(a)$ par les méthode déterministes classiques des rectangles, du point central, des trapèzes et de Simpson. Evaluer également $I(a)$ par la méthode de Monte-Carlo puis grace à la fonction `erf` de Matlab. Dresser, pour différentes valeurs de $a$ et pour $n = 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$, un tableau comparatif de vos six évaluations.

**Exercice 1.2.** Effectuer le même exercice sur l'intégrale $I(a)$ définie, pour tout $a > 0$, par

$$I(a) = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}} \exp(-x)\,dx$$

en comparant vos évaluations à celle obtenue grace à la fonction `pchisq` de Matlab.

**Exercice 1.3.** Evaluer la valeur de $\pi$ à partir des trois intégrales suivantes par la méthode de Monte-Carlo.

$$\int_{[-1,+1]} 4\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$\int_{[-1,+1]^2} \mathrm{I}_{(x^2+y^2\leqslant 1)}\,dxdy \quad \text{et} \quad \int_{[-1,+1]^3} \frac{3}{4}\mathrm{I}_{(x^2+y^2+z^2\leqslant 1)}\,dxdydz.$$

Comparer vos trois résultats avec les évaluations obtenues grâce aux fonctions `quad`, `dblquad` et `triplequad` de Matlab.

**Exercice 1.4.** Pour $a > 0$, soit $f_a$ la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par

$$f_a(x) = x(1-x)\sin^2(ax(1-x)).$$

Pour $a = 1, 10, 50, 100$, créer un code Matlab permettant d'évaluer l'intégrale

$$I(a) = \int_0^1 f_a(x)\,dx$$

par les méthode déterministes classiques, par la méthode de Monte-Carlo sur l'intervalle $[0, 1]$ et par la méthode de Monte-Carlo avec rejet sur le rectangle $[0, 1] \times [0, 1/4]$.

**Exercice 1.5.** Effectuer le même exercice sur la fonction $f_a$ définie par

$$f_a(x) = x\sin^2(a/x)\mathrm{I}_{x\in[0.5,1]}$$

en proposant une méthode de Monte-Carlo avec rejet adaptée à $f_a$.