Feuille de TP n°13
Transformée de Laplace en modélisation

1 Transformée de Laplace

Définition 1.1. *On appelle* transformée de Laplace *d'une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}^d$ la fonction $\mathbf{L}_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}^d$ par*

$$\mathbf{L}_\mu(t) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{\langle t,x\rangle}\, d\mu(x).$$

La transformée de Laplace d'un vecteur aléatoire X de $\mathbb{R}^d$ n'est rien d'autre que $\mathbf{L}_{\mathcal{L}(X)}$ et on a $\mathbf{L}_\mu(t) = \mathbf{E}(e^{\langle t,X\rangle})$. On définit également l'ensemble

$$\mathcal{D}_\mu := \left\{t \in \mathbb{R}^d,\, \mathbf{L}_\mu(t) < +\infty\right\},$$

et on notera $\mathbf{int}(\mathcal{D}_\mu)$ son intérieur pour la topologie de $\mathbb{R}^d$.

Proposition 1.2. *L'ensemble $\mathcal{D}_\mu$ est un ensemble convexe non vide de $\mathbb{R}^d$ contenant l'origine 0 et on a toujours $\mathbf{L}_\mu(0) = 1$. De plus, $\log \mathbf{L}_\mu$ est convexe sur $\mathcal{D}_\mu$. Enfin, lorsque $d = 1$, si le support de μ est inclus dans $\mathbb{R}_+$, alors $\mathbb{R}_- \subset \mathcal{D}_\mu$; symétriquement, si le support de μ est inclus dans $\mathbb{R}_-$, alors $\mathbb{R}_+ \subset \mathcal{D}_\mu$.*

Dans la suite, on considérea essentiellement les transformées de Laplace de variables aléatoires, i.e. $d = 1$.

Théorème 1.3. *Soit X une v.a.r. de loi μ. Si $0 \in \mathbf{int}(\mathcal{D}_\mu)$, alors $\mathbf{L}_\mu$ est analytique sur $\mathbf{int}(\mathcal{D}_\mu)$ et X possède des moments de tout ordre, donnés pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\mathbf{E}(X^n) = \mathbf{L}_\mu^{(n)}(0)$. De plus, pour tout $t \in \mathbf{int}(\mathcal{D}_\mu)$, on a*

$$\mathbf{L}_\mu(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\mathbf{E}(X^n).$$

Théorème 1.4 (Caractérisation de la loi). *La transformée de Laplace $\mu \mapsto \mathbf{L}_\mu$ est en quelque sorte injective. Ainsi, si $\mathbf{L}_\mu$ et $\mathbf{L}_\nu$ coincident sur un ensemble ouvert non vide en prenant des valeurs finies, alors $\mu = \nu$.*

2 Transformée de Cramér

Définition 2.1. *Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$, de transformée de Laplace $\mathbf{L}_\mu$. On appelle transformée de Cramér $\mathbf{I}_\mu$ de μ la transformée de Legendre de $\varphi_\mu := \log \mathbf{L}_\mu$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par*

$$\mathbf{I}_\mu(x) := \sup_{t\in\mathbb{R}}\{xt - \varphi_\mu(t)\}.$$

La transformée de Cramér d'une v.a.r. X n'est rien d'autre que $\mathbf{I}_{\mathcal{L}(X)}$. La fonction φ_μ est parfois qualifiée de « log-Laplace » de μ.

Remarque 2.2. Comme $\varphi_\mu(0) = 0$, $\mathbf{I}_\mu$ est à valeurs dans $[0; +\infty]$. De plus, $\mathbf{I}_\mu(x) = \sup_{t\in\mathcal{D}}\{xt - \varphi_\mu(t)\}$ et, si $\mathcal{D}_\mu = \{0\}$, $\mathbf{I}_\mu$ est identiquement nulle.

Remarque 2.3. Soit X une v.a.r. de loi μ. Alors φ_μ et $\mathbf{I}_\mu$ sont convexes. De plus, si X est intégrable avec $m = \mathbf{E}(X)$, alors $\mathbf{I}_\mu(m) = 0$, $\mathbf{I}_\mu$ est croissante sur $[m; +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty; m]$. Enfin, on a

$$\mathbf{I}_\mu(x) = \begin{cases} \sup\limits_{t\geqslant 0}\{xt - \varphi_\mu(t)\} \text{ si } x \geqslant m, \\ \sup\limits_{t\leqslant 0}\{xt - \varphi_\mu(t)\} \text{ si } x \leqslant m. \end{cases}$$

3 Grandes Déviations et concentration de la mesure

Théorème 3.1 (Inégalité de concentration de Hoeffding). *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. indépendantes et bornées à valeurs dans $[a_k, b_k]$ respectivement. Si $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, alors pour tout $x \geqslant 0$,*

$$\mathbb{P}(S_n - \mathbf{E}(S_n) \geqslant x) \leqslant \exp\left(-\frac{2x^2}{(b_1-a_1)^2 + \cdots + (b_k-a_k)^2}\right).$$

Théorème 3.2 (Inégalité de concentration de Bennett). *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. indépendantes, de carré intégrable, et à valeurs dans $]-\infty, c]$. Si $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, alors pour tout $V_n \geqslant \sum_{k=1}^n \mathbf{E}(X_k^2)$ et tout $x \geqslant 0$,*

$$\mathbb{P}(S_n - \mathbf{E}(S_n) \geqslant x) \leqslant \exp\left(-\frac{x^2}{2\left(V_n + \frac{1}{3}xc\right)}\right).$$

Théorème 3.3 (Théorème de Cramér-Chernov). *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. i.i.d. de loi commune μ de transformée de Cramér $\mathbf{I}_\mu$. Soit $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. On a alors les bornes asymptotiques suivantes.*

Majoration. *Pour tout ensemble fermé F de $\mathbb{R}$,*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \log \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in F\right) \leqslant -\inf_{x\in F} \mathbf{I}_\mu(x),$$

Minoration. *Pour tout ensemble ouvert G de $\mathbb{R}$,*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \log \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in G\right) \geqslant -\inf_{x\in G} \mathbf{I}_\mu(x).$$

On dit que la suite $(\frac{1}{n} S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ satisfait à un principe de grandes déviations *(PGD) de* vitesse $a_n := n$ *et de* fonction de taux $\mathbf{I}_\mu$.

Remarque 3.4. Le théorème de Cramér-Chernov est vrai sans aucune hypothèse d'intégrabilité sur les X_n. Cependant, lorsque les X_n sont intégrables avec $m = \mathbb{E}(X_1)$ alors,

$$\forall x \geqslant m, \quad \frac{1}{n}\log \mathbb{P}(S_n \geqslant nx) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\mathbf{I}_\mu(x) \quad \text{et} \quad \forall x \leqslant m, \quad \frac{1}{n}\log \mathbb{P}(S_n \leqslant nx) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\mathbf{I}_\mu(x).$$

4 Exercices et utilisation en modélisation

Exercice 4.1 (Qui est le plus fort ?). Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $\sigma > 0$ et soit $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Monter que pour tout $x > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geqslant x\right) \sim \frac{2\sigma}{x\sqrt{2\pi n}} \exp\left(-n\frac{x^2}{2\sigma^2}\right).$$

Écrire un programme permettant de comparer, pour différentes valeurs de n, la probabilité ci-dessus avec l'approximation donnée par le TLC, le PGD de Cramér-Chernov, ainsi que le développement asymptotique précis, où les paramètres x, m et σ^2 sont affectés par l'utilisateur.

Exercice 4.2 (PGD de la loi exponentielle). Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ et soit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que $(\frac{1}{n} S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ satisfait un PGD de fonction de taux valant $(\lambda x - 1 - \log(\lambda x))$ si $x > 0$ et $+\infty$ sinon. Écrire un programme illustrant ce PGD.

Exercice 4.3 (Records). Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. absolument continues. Pour tout $n \geqslant 1$, on note R_n le rang relatif de X_n, défini par $R_n := 1 + \sum_{k=1}^n \mathrm{I}_{\{X_k > X_n\}}$. Il est facile de voir que $\mathbb{P}(R_n = r_n) = 1/n$ avec $r_n \in \{1, \ldots, n\}$. Pour tout $n \geqslant 1$, si $R_n = 1$, on dit qu'il se produit un record à l'instant n. On s'intéresse à la variable aléatoire Z_n comptant le nombre de records jusqu'à l'instant n, définie par $Z_n := \sum_{k=1}^{n} \mathrm{I}_{\{R_k=1\}}$. Montrer que

$$\frac{Z_n}{\log n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} 1 \quad \text{et que} \quad \frac{Z_n - \log n}{\sqrt{\log n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Montrer que $(\frac{1}{\log n} Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ satisfait un PGD de vitesse $\log n$ et de fonction de taux valant $x\log x - x + 1$ si $x > 0$ et $+\infty$ sinon. Écrire un programme illustrant ces résultats de convergence.

Exercice 4.4 (Processus auto-regressif). On considère le processus auto-régressif stable $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par $X_n := \theta X_{n-1} + \varepsilon_n$ avec $|\theta| < 1$, $X_0 = 0$ et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ i.i.d. de loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. On estime θ par l'estimateur de Yule-Walker

$$\widehat{\theta}_n := \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k X_{k-1}}{\sum_{k=0}^{n} X_k^2},$$

qui est relié aux moindres carrés. Vérifier que

$$\widehat{\theta}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} \theta \quad \text{et que} \quad \sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1-\theta^2).$$

On peut également montrer à l'aide du théorème de Gartner-Ellis (extension du théorème de Cramér-Chernov) que $(\widehat{\theta}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ satisfait à un PGD de fonction de taux

$$\mathbf{I}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1+\theta^2-2\theta x}{1-x^2}\right) & \text{si } -1 < x < 1, \\ +\infty \text{ sinon.} & \end{cases}$$

Écrire un programme illustrant ces résultats de convergence.

Références

[1] N. Bouleau – *Processus stochastiques et applications*, Hermann, 2000, Deuxième édition.

[2] M. Cottrell, C. Duhamel, V. Genon-Catalot et T. Meyre – *Exercices de probabilités*, Cassini, 1999, Deuxième édition. Avec rappels de cours.

[3] D. Dacunha-Castelle et M. Duflo – *Probabilités et statistiques. Tome 1*, Masson, Paris, 1982, Problèmes à temps fixe.