Feuille de TP n°11
Loi exponentielle en modélisation

1 Géométrique, Exponentielle, Weibull

La loi géométrique $\mathcal{G}$, la loi exponentielle $\mathcal{E}$ et la loi de Weibull $\mathcal{W}$ sont souvent utilisées pour modéliser des temps d'attente ou des durées de vie. Il se trouve que $\mathcal{G}$ est la version discrète de $\mathcal{E}$, et que $\mathcal{E}$ est un cas particulier de $\mathcal{W}$.

Remarque 1.1. Dans toute la suite, la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$, notée $\mathcal{G}(p)$, désignera la loi $p\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1}\delta_n$ ou bien la loi $p\sum_{n=0}^{\infty}(1-p)^{n}\delta_n$, le passage de l'une à l'autre se faisant en translatant le support de 1. La définition utilisée sera précisée si nécessaire pour éviter les confusions.

Définition 1.2. *Soit X une v.a.r. de fonction de répartition F sur $\mathbb{R}$. Sa loi est dite*

1. *exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ si $F(t) = (1 - \exp(-\lambda t))\,\mathrm{I}_{\{t\geqslant 0\}}$;*
2. *de Weibull $\mathcal{W}(a,\lambda)$ avec $a > 0$ et $\lambda > 0$ si $F(t) = (1 - \exp(-\lambda t^a))\,\mathrm{I}_{\{t\geqslant 0\}}$.*

Ces deux lois sont absolument continues, de densité respectives

$$x \mapsto \lambda \exp(-\lambda x)\,\mathrm{I}_{\{x\geqslant 0\}} \quad \text{et} \quad x \mapsto a\lambda x^{a-1}\exp(-\lambda x^a)\,\mathrm{I}_{\{x\geqslant 0\}}.$$

Si $X \sim \mathcal{W}(a,\lambda)$, alors $X^a \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Si $a = 1$, alors X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Si $a = 2$, alors X suit la loi de Rayleigh $\mathcal{R}(a)$.

Remarque 1.3 (Premiers moments. . .). Les deux premiers moments de $\mathcal{E}(\lambda)$ sont λ^{-1} et λ^{-2}. Plus généralement, les deux premiers moments de $\mathcal{W}(a,\lambda)$ sont donnés par $\lambda^{-1/a}\,\Gamma(1+1/a)$ et $\lambda^{-2/a}\,(\Gamma(1+2/a)-\Gamma^2(a+1/a))$ où Γ est la fonction Gamma d'Euler définie par $\Gamma(a) := \int_0^\infty x^{a-1}\exp(-x)\,dx$.

Remarque 1.4 (Amnésie exponentielle). La loi exponentielle hérite de sa fonction de répartition exponentielle des propriétés remarquables. Ainsi, une v.a.r. X absolument continue à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ suit une loi exponentielle si et seulement si, pour tout $s, t \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}(X > t + s \,|\, X \geqslant t) = \mathbb{P}(X > s). \tag{1}$$

Dans le même esprit, la v.a.r. absolument continue X à valeur dans $\mathbb{R}_+$ suit une loi exponentielle si et seulement si, pour tout $s, t > 0$, $\mathbb{P}(X \leqslant t + s \,|\, X > t) = st + o(s)$. La propriété (1) exprime le fait que la loi exponentielle se caractérise par une *absence de mémoire* :

$$\forall t > 0,\ \mathcal{L}(X - t \,|\, X \geqslant t) = \mathcal{L}(X).$$

Cela traduit bien le comportement de durées de vie en fiabilité, du temps d'arrivée du prochain client dans une file d'attente, etc. Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et de lois respectives $\mathcal{E}(\lambda_1), \dots, \mathcal{E}(\lambda_n)$, alors $\min(X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{E}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$ et $\mathbb{P}(X_i = \min(X_1, \dots, X_n)) = \lambda_i/(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$. Comme nous allons le voir, cette dernière propriété joue un rôle très important dans l'étude des files d'attentes ainsi que pour leur simulation.

Remarque 1.5 (Amnésie géométrique). Ici, on considère la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ de paramètre $p \in]0,1[$ donnée par $\mathcal{G}(p) := p\sum_{n=0}^{\infty}(1-p)^n\delta_n$, mais ce qui est dit d'adapte sans immédiatement à l'autre définition. La fonction de répartition de $\mathcal{G}(p)$ est nulle sur $]-\infty, 0[$, tandis que sur les intervalles de la forme $[n-1, n[$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, elle vaut $1 - (1-p)^n = 1 - e^{-n\log(1-p)}$. La loi $\mathcal{G}(p)$ hérite de la sa fonction de répartition quasi-exponentielle des propriétés remarquables. Ainsi, une v.a.r. discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}$ suit une loi $\mathcal{G}(p)$ si et seulement si, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X > n + m \,|\, X \geqslant n) = \mathbb{P}(X > m). \tag{2}$$

La propriété (2) exprime le fait que la loi géométrique se caractérise par une *absence de mémoire* :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; \mathcal{L}(X - n \,|\, X \geqslant n) = \mathcal{L}(X).$$

Cela traduit bien le comportement de durées de vie en fiabilité, du temps d'arrivée du prochain client dans une file d'attente, etc. Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et de lois respectives $\mathcal{G}(p_1), \dots, \mathcal{G}(p_n)$, alors $\min(X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{G}(1 - (1 - p_1) \cdots (1 - p_n))$.

Exercice 1.6 (Petit calcul). Soit $X_1, \dots, X_n$ des v.a. indépendantes et de lois respectives $\mathcal{G}(p_1), \dots, \mathcal{G}(p_n)$ où $\mathcal{G}(p) := p \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n \delta_n$. Exprimer $\mathbb{P}(X_i = \min(X_1, \dots, X_n))$ en fonction de $p_1, \dots, p_n$. Ce calcul sera utile à résolution de l'exercice 3.5.

Remarque 1.7 (Quasi-amnésie de Weibull). Si $X \sim \mathcal{W}(a, \lambda)$, alors pour tout $s, t \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}(X > t + s \,|\, X > t) \quad \begin{cases} \geqslant \; \mathbb{P}(X > s) & \text{si } a \leqslant 1, \\ \leqslant \; \mathbb{P}(X > s) & \text{si } a \geqslant 1. \end{cases}$$

Remarque 1.8 (La loi géométrique comme partie entière de la loi exponentielle). Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière et $\lceil x \rceil := x - \lfloor x \rfloor$ sa partie fractionnaire. Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors $\lfloor X \rfloor$ et $\lceil X \rceil$ sont indépendantes. De plus, $\lfloor X \rfloor \sim \mathcal{G}(1 - e^{-\lambda})$ où $\mathcal{G}(p) := p \sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)^n \, \delta_n$, et enfin $\lceil X \rceil$ suit la loi $\mathcal{L}(X \,|\, X \in [0,1])$ de densité suivante:

$$x \in \mathbb{R} \to \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \, \lambda \, e^{-\lambda x} \, \mathrm{I}_{[0,1]}(x).$$

Ce fait[1] est une conséquence directe de l'absence de mémoire de $\mathcal{E}(\lambda)$, qui entraîne que $\mathcal{L}(\lceil X \rceil \,|\, \lfloor X \rfloor)$ ne dépend pas de $\lfloor X \rfloor$ et vaut $\mathcal{L}(X \,|\, X \in [0,1])$. Réciproquement, on peut approximer la loi exponentielle par une suite de loi géométriques, cf. [6, Prop. 5.5].

L'intuition à retenir est que dans un jeu de pile ou face de paramère de gain $p \in]0,1[$, la quantité $-\log(1 - p)$ joue le rôle du paramètre λ d'une loi exponentielle. La loi géométrique est l'analogue discret de la loi exponentielle. Nous allons voir que la loi exponentielle apparait comme la loi des temps inter-sauts d'un processus de Poisson, tandisque la loi géométrique apparait comme la loi des temps inter-sauts d'un processus de Bernoulli.

Remarque 1.9 (Lois de Dirichlet – Statistiques d'ordre – Lois exponentielles). Soit $(U_1, \dots, U_n)$ un vecteur de v.a.r. i.i.d. de loi uniforme sur $[a, b]$. Soit $V := (U_{(1)}, \dots, U_{(n)})$ son réarrangement croissant. La loi de V est appelée *loi de Dirichlet* $\mathcal{D}_n([a, b])$, ou *statistique d'ordre*. Elle est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ et admet pour densité

$$\frac{n!}{(b-a)^n} \, \mathrm{I}_{\{a < x_1 < \cdots < x_n < b\}}.$$

Soit à présent $(D_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. i.i.d. de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $T_n := D_1 + \cdots + D_n$, qui suit une loi Gamma[2] $\Gamma(n, \lambda)$. On a alors pour tout $t > 0$,

$$\mathcal{L}(T_1, \dots, T_{n-1} \,|\, T_{n-1} < t < T_n) \;=\; \mathcal{L}(T_1, \dots, T_{n-1} \,|\, T_n = t) \;=\; \mathcal{D}_{n-1}([0, t]).$$

[1] Plus généralement, si $Y_t := \lfloor X/t \rfloor + 1$ avec $t > 0$ fixé et $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors $Y_t \sim \mathcal{G}(1 - \exp(-\lambda t))$, etc.

[2] De densité $\frac{1}{(n-1)!} \, t^{n-1} \exp(-\lambda t) \, dt$.

2 Processus de Poisson simple et processus de Bernoulli

Définition 2.1 (Processus de Poisson simple). *On dit que* $(N_t)_{t\geqslant 0}$ *est un processus de Poisson simple d'intensité* $\lambda > 0$ *issu de zéro si et seulement si* $N_0 = 0$ *et pour tout* $s, t > 0$, *les v.a.r.* $N_{t+s} - N_s$ *et* N_s *sont indépendantes et de loi de Poisson* $\mathcal{P}(\lambda s)$ *et* $\mathcal{P}(\lambda t)$ *respectivement. Ainsi, le processus de Poisson simple est un processus à temps continu et à accroissements stationnaires et indépendants, tout comme le mouvement brownien*[3]

Définition 2.2 (Processus de Bernoulli). *On dit que* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est un processus de Bernoulli de paramètre* $p \in]0,1[$ *issu de zéro si et seulement si* $B_0 = 0$ *et pour tout* $n, m \in \mathbb{N}^*$, $B_{n+m} - B_m$ *et* B_m *sont indépendantes et de loi binomiale* $\mathcal{B}(m,p)$ *et* $\mathcal{B}(n,p)$ *respectivement. Ainsi, le processus de Bernoulli est un processus à temps discret et à accroissements stationnaires et indépendants.*

Remarque 2.3 (Simuler la trajectoire d'une processus de Poisson simple). Simuler une trajectoire à n sauts d'un processus de Poisson simple d'intensité λ est une tache très simple:

```
stairs(cumsum(rexpweib(n,lambda,1)),[1:n]);
```

Proposition 2.4 (Temps inter-sauts d'un processus de Poisson simple). *Soit* $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de v.a.r. i.i.d. de loi exponentielle* $\mathcal{E}(\lambda)$ *avec* $\lambda > 0$. *Pour tout* $t \geqslant 0$, *si*

$$N_t := \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{I}_{\{T_n \leqslant t\}} \quad \textit{avec} \quad T_n := \sum_{k=1}^{n} D_k.$$

Alors $(N_t)_{t\geqslant 0}$ *est un processus de Poisson simple issu de zéro, d'intensité* λ. *Réciproquement, les temps inter-sauts* $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *d'un processus de Poisson simple* $(N_t)_{t\geqslant 0}$ *d'intensité* $\lambda > 0$ *sont i.i.d. et suivent des lois exponentielles* $\mathcal{E}(\lambda)$; *quant aux temps de saut* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, *ils suivent des lois Gamma: le* n*-ième saut suit la loi Gamma* $\mathcal{E}(\lambda)^{*n} = \Gamma(n,\lambda)$.

Proposition 2.5 (Temps inter-sauts d'un processus de Bernoulli). *Soit* $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *une suite de v.a.r. i.i.d. de loi géométrique* $\mathcal{G}(p) := p\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1}\delta_n$ *avec* $p \in]0,1[$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *si*

$$B_n := \sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{I}_{\{T_m \leqslant n\}} \quad \textit{avec} \quad T_m := \sum_{k=1}^{n} D_k.$$

Alors $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est un processus de Bernoulli issu de zéro, de paramètre* p. *Réciproquement, les temps inter-sauts* $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *d'un processus de Bernoulli* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de paramètre* $p \in]0,1[$ *sont i.i.d. et suivent des lois géométriques* $\mathcal{G}(p) = p\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1}\delta_n$; *quant aux temps de saut* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, *ils suivent des lois négatives-binomiales*[4]*: le* n*-ième saut suit la loi* $\mathcal{G}(p)^{*n}$.

Remarque 2.6 (Le jeu de pile ou face et le processus de Bernoulli). Si $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a. de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p) = (1-p)\delta_0 + p\delta_1$, alors le processus $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par $B_0 = 0$ et $B_n := Z_1 + \cdots + Z_n$ est un processus de Bernoulli de paramètre p. Ainsi, B_n est le nombre de gains après le n-ième lancé à un jeu de pile ou face avec probabilité p de gagner.

Théorème 2.7 (Loi forte des grands nombres). *L'indépendance et la stationnarité des accroissements des processus de Poisson et de Bernoulli entraîne une loi forte des grands nombres. Soit* $(N_t)_{t\geqslant 0}$ *un processus de*

[3] Ils appartiennent tous deux à la classe des *processus de Lévy*, qui regroupe les processus à temps continu à accroissements stationnaires et indépendants. Un processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ appartenant à cette classe est caractérisé par la donnée de $\mathcal{L}(X_1)$, et $\mathcal{L}(X_t)$ est obtenue à partir de $\mathcal{L}(X_1)$ par la dilatation de coefficient t. Pour un processus de Lévy, $\mathcal{L}(X_1)$ est toujours *infiniment divisible*, i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une loi ν_n telle que $\nu_n^{*n} = \mathcal{L}(X_1)$. Réciproquement, une loi infiniment divisible donne naissance à un processus de Lévy. Les lois infiniment divisibles sont caractérisées par une transformée de Fourier de forme très particulière (formule de Lévy-Khinchine). Les lois gaussiennes, les lois Gamma, et la loi de Poisson sont infiniment divisibles. Bien entendu, la notion d'infinie divisibilité n'a pas de sens pour les lois discrètes à support fini, mais d'une certaine façon, les lois binomiales et négatives-binomiales sont « finiment divisibles ».

[4] Appelées également lois de Pascal.

Poisson simple d'intensité $\lambda > 0$, alors

$$\frac{N_t}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{p.s.} \lambda.$$

Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$, alors

$$\frac{B_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} p.$$

Définition 2.8 (Processus de renouvellement et de comptage). *Soit $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des v.a.r. i.i.d. strictement positives de loi μ. Le processus $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par $T_0 = 0$ et $T_n := D_1 + \cdots + D_n$ est appelé* processus de renouvellement *de la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Lorsque la loi μ est portée par $\mathbb{N}$, les v.a. $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont à valeurs discrètes et on appelle* processus de comptage *associé à la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ le processus à temps discret $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par*

$$N_n := \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{I}_{\{T_k \leqslant n\}}.$$

Lorsque μ est plus générale, on appelle processus de comptage *associé à la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ le processus à temps continu $(N_t)_{t\geqslant 0}$ défini par*

$$N_t := \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{I}_{\{T_k \leqslant t\}}.$$

Remarque 2.9. Le processus de Poisson simple d'intensité λ est le processus de comptage (à temps continu) associé à la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Le processus de Bernoulli de paramètre p est le processus de comptage (à temps discret) associé à la loi géométrique $\mathcal{G}(p) := p\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1}\delta_n$.

3 Utilisation en modélisation

Exercice 3.1 (Records). Soit $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r i.i.d. de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ et soit $M_n := \max_{1\leqslant k\leqslant n} D_k$. Montrer que

$$\frac{M_n}{\log n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad M_n - \frac{\log n}{\lambda} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{E}_{\mathcal{D}}(\lambda),$$

où $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}(\lambda)$ est la loi exponentielle double de paramètre λ. Créer un programme permettant d'illustrer ces résultats de convergence. La v.a.r. M_n correspond au plus long temps entre deux sauts avant le n-ième saut d'un processus de Poisson simple d'intensité λ.

Exercice 3.2 (Comptage). Créer un programme permettant de simuler un processus de comptage $(N_t)_{t\geqslant 0}$ associé à la loi de Weibull $\mathcal{W}(a,\lambda)$ où les paramètres $a > 0$ et $\lambda > 0$ sont affectés par l'utilisateur. Vérifier la loi des grands nombres et le théorème de limite centrale pour le processus $(N_t)_{t\geqslant 0}$.

Exercice 3.3 (Renouvellement). Soit $(N_t)_{t\geqslant 0}$ un processus de Poisson simple d'intensité $\lambda > 0$ et soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un processus de renouvellement associé à une suite de v.a.r. i.i.d. strictement positives d'espérance m et de variance $\sigma^2 > 0$. On suppose que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est indépendante de $(N_t)_{t\geqslant 0}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $Z_n := N_{T_n}$. Créer un programme permettant de simuler les processus $(N_t)_{t\geqslant 0}$ et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où les paramètres λ, m et σ^2 sont affectés par l'utilisateur. Vérifier la loi des grands nombres et le théorème de limite centrale pour le processus $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3.4 (Assureur communiste et réservoir percé). On peut modéliser le solde du compte en banque d'un assureur communiste à l'instant t par $x + \mu t - N_t$ où $\mu > 0$ et où $(N_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus de Poisson simple d'intensité λ. La « dérive » linéaire μt représente les apports réguliers de ses assurés (cotisations) tandisque le processus de Poisson simple $(N_t)_{t\geqslant 0}$ modélise les catastrophes qui provoquent des remboursements. Pourquoi une telle modélisation n'est pas totalement farfelue ? Un assureur capitaliste préfèrera faire fructifier une partie de son solde en bourse, ce qui rend le modèle plus complexe. Comment tenir compte de la fluctuation du nombre d'assurés ? Comment adapter le modèle au cas où l'assureur place une partie de son solde en caisse d'épargne à taux fixe $\rho > 0$? Les lecteurs communistes ou rétifs aux assurances peuvent penser par exemple au compte en banque d'une association. Exprimer le temps de ruine de l'assureur communiste en fonction des paramètres λ et μ, et confronter les prédictions à des simulations. Le processus $(\mu t - N_t)_{t\geqslant 0}$ permet également de modéliser la quantité d'eau dans un réservoir à ciel ouvert percé d'un trou, en plein hiver, en négligeant l'évaporation. Expliquer pourquoi.

Exercice 3.5 (Files d'attentes). Des clients attendent en file devant un guichet. On suppose que les temps séparant les arrivées de deux usagers successifs sont modélisables par des v.a.r. i.i.d. $\mathcal{E}(\lambda)$, tandisque les temps mis par le guichetier pour servir les clients successifs sont modélisables par des v.a.r. i.i.d. de loi $\mathcal{E}(\mu)$, indépendantes des précédentes. On parle de file d'attente M/M/1. Écrire un programme simulant le fonctionnement d'un tel guichet. Vérifiez que lorsque $\rho := \lambda/\mu < 1$, le nombre d'usagers N_t dans la file d'attente converge en loi, lorsque le temps t tends vers l'infini, vers la loi géométrique $\mathcal{G}(\rho)$. Que représente la quantité ρ^K pour un entier K fixé (penser à une salle d'attente de K places : file d'attente M/M/1/K). Le paramètre ρ représente la *charge de la file*. Vérifiez que lorsque $\rho > 1$, N_t diverge presque sûrement. Étendre ce qui précède au cas où $s \in \mathbb{N}^*$ guichets indépendants sont disponibles (file M/M/s). On pourra également penser à des serveurs informatiques (resp. pistes d'aéroport) qui jouent le rôle de guichets, et à des programmes clients (resp. avions) qui jouent le rôle d'usagers. Après avoir pensé au problème, vérifiez que le programme suivant est valide...

```
% ### Copyright (C) D. Chafaï, 2001. GNU GPL.
% ### http://www.lsp.ups-tlse.fr/Chafai/agregation.html
% File d'attente M/M/s. Les clients arrivent avec des temps exp(l). Les s
% serveurs servent avec des temps exp(m). N(t) = nombre de clients dans la
% file au temps t y compris ceux qui sont en train d'etre servis.
% Tester T=+Inf.
clear; clf;
s=2;    % nombre de serveurs
l=.5;   % intensité d'arrivée des clients
m=.26;  % intensité du traitement d'un serveur
T=20;   % on cherche la longueur de la file à cet instant
r=1000; % nombre de réalisations i.i.d.
for i=1:r,
    n=0;  % la file est vide au depart
    t=-log(rand)/l; % on attend le premier client, temps de loi exp(l)
    while (t<T)     % on boucle tant que le temps est < t
        % il s'est passe quelque chose
        if n==0 % la file etait vide
         n=1;   % un client de plus
        else    % la file n'etait pas vide
         % un client de plus avec proba l/(l+m*min(n,s))
         % un client de moins avec proba m*min(n,s)/(l+m*min(n,s))
         n=n+2*(rand<l/(l+m*min(n,s)))-1;
        end
        % on attend le prochain changement, temps de loi exp(l+m*min(n,s))
        t=t-log(rand)/(l+m*min(n,s));
    end
    N(i)=n;
end
histo(N)
[mean(N),std(N)]
```

Dans le cas de la file d'attente avec une infinité de serveurs ($s = +\infty$), vérifiez que pour tout $t \geqslant 0$, tout $u \geqslant 0$

et tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{L}(N_{t+u}|N_u = n) = \mathcal{B}\big(n, e^{-\mu t}\big) * \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{\mu}\big(1 - e^{-t\mu}\big)\right).$$

Comprenez-vous pourquoi ? Qu'elle est la loi d'équilibre ?

Exercice 3.6 (La machine est en panne). On considère une machine qui peut tomber en panne et qui est réparée instantanément. On peut, par exemple, penser à une machine avec une pile, une lampe avec une ampoule, etc. Cette machine est mise en fonctionnement à l'instant 0. Soit D_1 sa durée de vie avant la première panne. Lorsqu'elle tombe en panne, on la remplace par une machine neuve identique de durée de vie D_2 et ainsi de suite. On suppose que $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de v.a.r i.i.d. strictement positives d'espérance m et de variance σ^2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n correspond à l'instant de la n-ième panne, avec $S_0 = 0$. Finalement, pour tout $t \geqslant 0$, N_t est le nombre de pannes survenues avant l'instant t et $H(t) := \mathbb{E}(N_t)$ est la fonction de renouvellement du processus $(N_t)_{t\geqslant 0}$. Montrer que si $(N_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus de Poisson simple d'intensité $\lambda > 0$, $H(t) = \lambda t$. Plus géréralement, montrer que $t/m - 1 \leqslant H(t) \leqslant t/m + \sigma^2/m^2$. Ensuite, vérifier que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{H(t)}{t} = \frac{1}{m} \quad \text{et} \quad \lim_{t\to\infty} H(t) - \frac{t}{m} = \frac{\sigma^2 - m^2}{2m^2}.$$

Créer un programme permettant d'illustrer les résultats de convergence associés à la fonction de renouvellement H, où les paramètres λ, m et σ^2 sont affectés par l'utilisateur.

Exercice 3.7 (Réseaux de Jackson et de Petri). Cf. [6, Section 5].

Exercice 3.8 (Processus ponctuel de Poisson et vie du charençon). Cf. [5, Section 7.5].

Références

[1] J.-L. BON – *Fiabilité des systèmes - Méthodes mathématiques*, Masson, 1995.

[2] N. BOULEAU – *Processus stochastiques et applications*, Hermann, 2000, Deuxième édition.

[3] D. DACUNHA-CASTELLE et M. DUFLO – *Probabilités et statistiques. Tome 2*, Masson, Paris, 1983, Problèmes à temps mobile.

[4] D. FOATA et A. FUSH – *Processus stochastiques - processus de poisson, chaînes de markov et martingales*, Dunod, 2002.

[5] J. ISTAS – *Introduction aux modélisations mathématiques pour les sciences du vivant*, SMAI - Mathématiques et Applications 34, Springer, 2000.

[6] B. YCART – *Modèles et algorithmes markoviens*, SMAI - Mathématiques et Applications 39, Springer, 2002.