Mathématiques et Informatique de la Décision et des Organisations

Introduction aux séries temporelles

Master 1 Mathématiques Appliquées

Exercices de travaux dirigés

Année 2016/2017

Quartier d'affaires de la Défense et bois de Boulogne
Vus du bureau B518-bis de l'Université Paris-Dauphine

DAUPHINE UNIVERSITÉ PARIS | MIDO MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE DE LA DECISION ET DES ORGANISATIONS

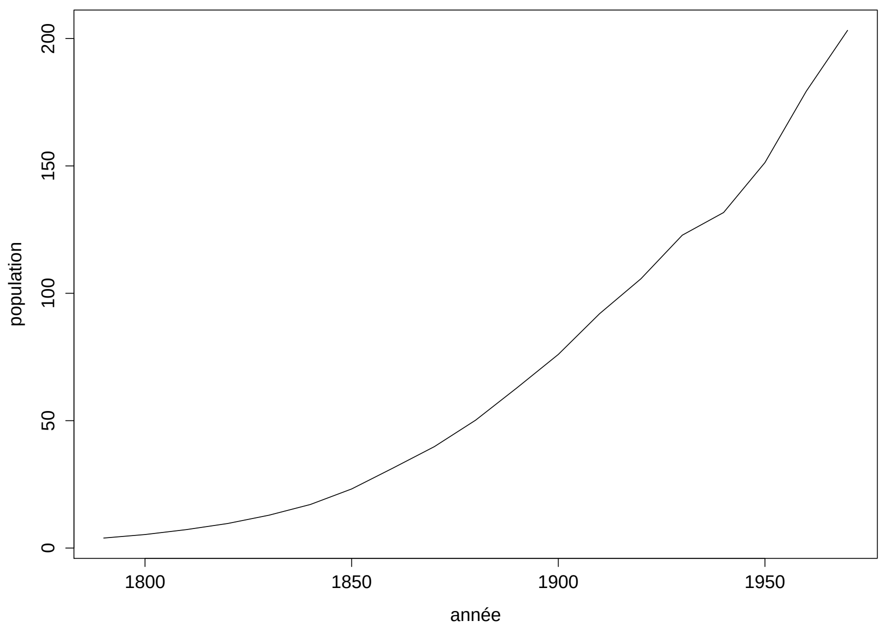
Version électronique composée avec LaTeX le 30 janvier 2017

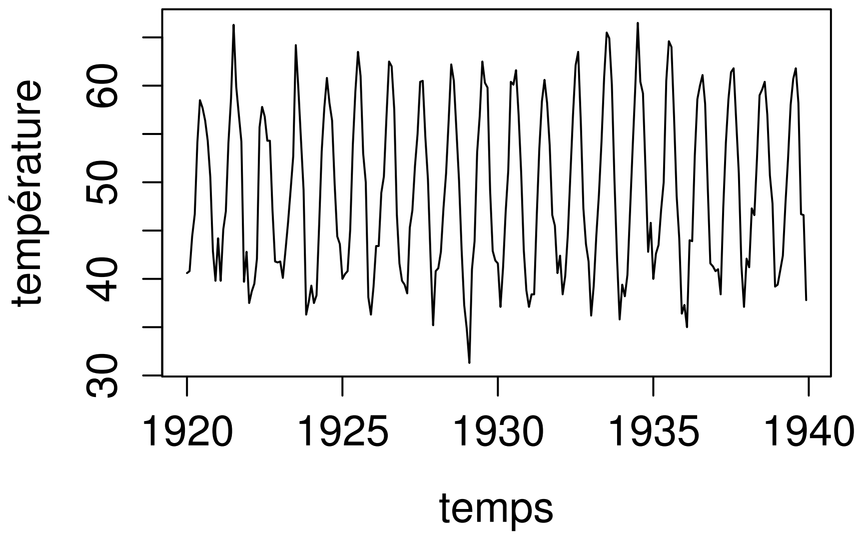
- Auteurs principaux des exercices et solutions :
  - Djalil Chafaï (enseignant Paris-Dauphine, 2013–)
  - Céline Duval (enseignant Paris-Dauphine, 2012–2013)
  - Céline Lévy-Leduc (enseignant Paris-Dauphine, 2010–2012)
- Contributeurs ou chasseurs de coquilles :
  - Marc Hoffmann (enseignant Paris-Dauphine, 2012–2013)
  - Stéphane Ivanoff (enseignant Paris-Dauphine, 2013–2015)
  - Camille Pagnard (enseignant Paris-Dauphine, 2014–)
  - Dylan Possamaï (enseignant Paris-Dauphine, 2012–)
  - Tan, Xiaolu (enseignant, Paris-Dauphine, 2016–)

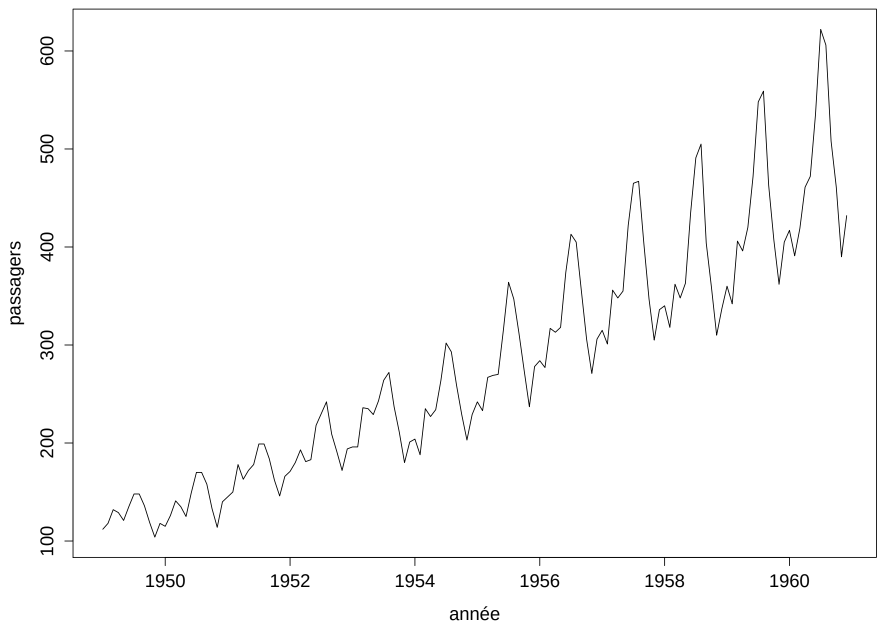
Feuille d'exercice 1

Tendance, stationnarité, autocovariance, opérateur retard

Exercice 1.1 (Quelques exemples)**.** Pensez-vous que les données représentées dans les trois figures suivantes (population des USA, température à Nottingham, nombre de passagers aériens) sont les réalisations de processus stationnaires ?







Pensez-vous qu'une droite horizontale est la réalisation d'un processus stationnaire ? Même question pour une sinusoïde.

Exercice 1.2 (Stationnarité et stationnarité stricte)**.** Soit X une variable aléatoire de loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$, et $Y = X\mathbf{1}_{U=1} - X\mathbf{1}_{U=0}$ où U est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $1/2$, indépendante de X.

1. Montrer que X et Y ont même loi ;
2. Montrer que $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ mais que X et Y ne sont pas indépendantes ;
3. En déduire un processus qui est bruit blanc (faible) mais pas bruit blanc fort.

Exercice 1.3 (Marche aléatoire)**.** Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire de dérive μ : $X_t = \mu + X_{t-1} + Z_t$ pour tout $t \geq 1$, où $X_0 = 0$ et où $(Z_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est un bruit blanc fort.

1. Calculer la fonction d'autocovariance γ_X de X. Est-ce que X est stationnaire ?
2. Le processus $(\Delta X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est-il stationnaire ?

Exercice 1.4 (Somme de processus stationnaires)**.** Soient $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ deux processus stationnaires, décorrélés (c'est-à-dire que $\mathrm{cov}(X_t, Y_s) = 0$ pour tous s, t). Montrer que le processus $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini par $Z_t = X_t + Y_t$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$ est stationnaire, et exprimer son autocovariance en fonction de celles de X et de Y.

Exercice 1.5 (Stationnarité de processus)**.** Trouver les processus stationnaires parmi les processus suivants :

1. $X_t = Z_t$ si t est pair, et $X_t = Z_t + 1$ si t est impair, avec $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ stationnaire ;
2. $X_t = Z_1 + \cdots + Z_t$ où $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc fort ;
3. $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$, où $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc et $\theta \in \mathbb{R}$ une constante ;
4. $X_t = Z_t Z_{t-1}$ où $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc fort ;
5. $Y_t = (-1)^t Z_t$ et $X_t = Y_t + Z_t$ où $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc fort.

Exercice 1.6 (Processus harmonique)**.** Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ le processus défini pour tout $t \in \mathbb{Z}$ par $X_t = A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t)$ où A et B sont des variables aléatoires indépendantes, de moyenne nulle et de variance σ^2, et où $\theta \in \mathbb{R}$ est une constante. Le processus X est-il stationnaire ? Calculer sa fonction d'autocovariance.

Exercice 1.7 (Propriété de la fonction d'autocovariance)**.**

1. Montrer que la fonction d'autocovariance $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ d'un processus stationnaire est paire et de type positif (en fait l'équivalence est vraie mais admise ici) ;
2. Montrer que la fonction γ définie par $\gamma(0) = 1$, $\gamma(h) = \rho$ pour $|h| = 1$ et $\gamma(h) = 0$ sinon, est une fonction d'autocovariance ssi $|\rho| \leq 1/2$. Donner un exemple de processus stationnaire ayant une telle fonction d'autocovariance ;
3. Les fonctions suivantes sont-elles des fonctions d'autocovariance d'un processus stationnaire ?
   a) $\gamma(h) = 1$ si $h = 0$ et $\gamma(h) = 1/h$ si $h \neq 0$;
   b) $\gamma(h) = 1 + \cos(h\pi/2)$;
   c) $\gamma(h) = (-1)^{|h|}$.

Exercice 1.8 (Propriété de la fonction d'autocovariance – Bis)**.** On pose

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}, \ldots, \sigma_n = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \rho \\ \rho & \ldots & \rho & 1 \end{pmatrix}, \ldots.$$

1. À quelle condition sur ρ la matrice σ_n est-elle une matrice de covariance pour tout n (indication : décomposer $\sigma_t = \alpha I + A$ où A a un spectre simple à calculer) ;
2. Construire un processus stationnaire de matrices d'autocovariance $(\sigma_n)_{n\geq 1}$

Exercice 1.9 (Estimation de tendance et de saisonnalité)**.** On considère le processus modélisé par $Y_t = \beta t + s_t + U_t$ où $\beta \in \mathbb{R}$, où s_t est une fonction périodique de période 4, et où $U = (U_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus stationnaire.

1. le processus $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est-il stationnaire ?
2. Montrer que $Z = (1-B^4)Y$ est stationnaire et calculer son autocovariance en fonction de celle de U.

Exercice 1.10 (Tendance)**.** Soit X un processus avec tendance polynomiale d'ordre k :

$$X_t = \sum_{i=0}^{k} a_i t^i + U_t,$$

où les coefficients a_i appartiennent à $\mathbb{R}$ et (U_t) est un processus stationnaire.

1. Montrer que le processus obtenu par l'application de $(1-B)$ à (X_t), où B désigne l'opérateur retard, admet une tendance polynomiale d'ordre $k-1$. Que se passe-t-il si on applique $(1-B)^p$ à (X_t) pour $p \in \mathbb{N}$?
2. On considère maintenant le processus $Y_t = X_t + S_t$ où S_t est une fonction d-périodique. Comment rendre le processus (Y_t) stationnaire ?

Feuille d'exercice 2

Filtrage

Exercice 2.1 (Filtrage)**.** On veut montrer la proposition suivante : si $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus stationnaire, et si $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est une suite de réels absolument sommables c'est-à-dire que $\sum_{i\in\mathbb{Z}}|a_i|<\infty$, alors $Y_t=\lim_{n,m\to\infty}\sum_{i=-n}^{m}a_iX_{t-i}$ définit un nouveau processus stationnaire. Ceci nécessite de préciser en quel sens est prise la limite.

1. Montrer que $Y_t\in L^1$ pour tout $t\in\mathbb{Z}$. En déduire que Y_t est bien défini p.s. ;
2. Montrer que $Y_t\in L^2$ pour tout $t\in\mathbb{Z}$;
3. Montrer que (Y_t) est un processus stationnaire tel que :

$$\mathbb{E}(Y)=\mu_Y=\mu_X\sum_{i\in\mathbb{Z}}a_i,\quad \text{et}\quad \gamma_Y(h)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}a_ia_j\gamma_X(h+j-i).$$

En déduire la preuve de la proposition exprimée au départ.

Exercice 2.2 (Géométrique et processus MA)**.** Soit (Z_t) un $\mathrm{BB}\big(0,\sigma^2\big)$ et

$$X_t=\sum_{i=0}^{t}\lambda^i(Z_{t-i}-Z_{t-i-1}).$$

1. Discuter selon les valeurs de $\lambda\in\mathbb{R}$ de la stationnarité de (X_t) ;
2. Lorsque $\lambda\in\,]-1,1[$, montrer qu'il existe un processus stationnaire (Y_t) tel que

$$(X_t-Y_t)\xrightarrow[t\to\infty]{L^2}0.$$

Exercice 2.3 (Processus AR)**.** On recherche un processus (X_t) solution de l'équation d'autorégression $X_t=\phi X_{t-1}+Z_t$ où (Z_t) est un bruit blanc de variance σ^2.

1. Lorsque $|\phi|<1$, montrer qu'il existe une unique solution stationnaire ;
2. À partir de cette solution stationnaire, montrer qu'il est possible de construire une infinité de solutions non-stationnaires ;
3. Dans le cas où $|\phi|>1$, montrer l'existence d'une unique solution stationnaire à cette équation. Cette solution est-elle causale ?
4. Lorsque $|\phi|=1$, montrer qu'il ne peut pas exister de solution stationnaire.

Exercice 2.4 (Filtre gaussien)**.** Soit $(Z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc faible, c'est-à-dire des variables aléatoires centrées, réduites, et décorrelées, et $\alpha\in\ell^2(\mathbb{Z})$. Montrer que pour tout $t\in\mathbb{Z}$, la variable aléatoire $X_t:=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\alpha_kZ_{t-k}$ est bien définie dans L^2 et est de variance $\|\alpha\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}$. Montrer que si de plus $(Z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est un vecteur gaussien alors $X_t\sim\mathcal{N}(0,\|\alpha\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z})})$.

Exercice 2.5 (Filtre à queues lourdes)**.**

1. Pour tout réel $\alpha > 0$, on dit qu'une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}$ est α-**stable** lorsque pour tout entier $n \geq 1$ et toutes variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi μ, la variable aléatoire $n^{-1/\alpha}(X_1 + \cdots + X_n)$ est également de loi μ. Montrer que les lois gaussiennes centrées sont 2-stables et que les lois de Cauchy sont 1-stables ;
2. Montrer que si X_1 est une v.a.r. telle qu'il existe des réels $c, \alpha > 0$ tels que $\Phi_X(t) := \mathbb{E}(\mathrm{e}^{itX}) = \mathrm{e}^{-c|t|^\alpha}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ alors la loi de X_1 est α-stable. On note $\mu_{\alpha,c}$ sa loi. Montrer que si $X_1, \ldots, X_n$ sont des v.a.r. indépendantes de lois $\mu_{\alpha,c_1}, \ldots, \mu_{\alpha,c_n}$ alors pour tous $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$, la v.a.r. $\beta_1 X_1 + \cdots + \beta_n X_n$ suit la loi $\mu_{\alpha,|\beta_1|^\alpha c_1 + \cdots + |\beta_n|^\alpha c_n}$;
3. Soit $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ une suite de v.a.r. i.i.d. de même loi $\mu_{\alpha,c}$ avec $c > 0$ et $\alpha \geq 1$. Montrer que pour tout $\eta \in \ell^\alpha(\mathbb{Z})$ et tout $t \in \mathbb{Z}$, il fait sens de dire que $F_\eta Z_t := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \eta_k Z_{t-k}$ suit la loi $\mu_{\alpha,c\|\eta\|^\alpha_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})}}$. Que se passe-t-il pour $\alpha = 2$ et $\alpha = 1$? Peut-on définir le filtre $(F_\eta Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ en tant que processus stationnaire ?

Exercice 2.6 (Filtre de Kalman-Bucy – Tiré des petites classes de l'École Polytechnique)**.**

1. Montrer que si $(X, Z, Z_0, \ldots, Z_{n-1})$ est un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^{n+2}$ tel que
$$\mathrm{Loi}(X \mid Z_0, \ldots, Z_{n-1}) = \mathcal{N}(\mu, \gamma^2) \quad \text{et} \quad \mathrm{Loi}(Z \mid X, Z_0, \ldots, Z_{n-1}) = \mathcal{N}(X, \delta^2)$$
alors
$$\mathrm{Loi}(X \mid Z, Z_0, \ldots, Z_{n-1}) = \mathcal{N}\left(\rho^2\left(\frac{\mu}{\gamma^2} + \frac{Z}{\delta\mathrm{e}^2}\right), \rho^2\right) \quad \text{où} \quad \frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{\delta\mathrm{e}^2};$$
2. Un mobile se déplace sur $\mathbb{R}$ avec un mouvement théoriquement perturbé défini par
$$X_0 = 0, \quad X_n = a + X_{n-1} + \varepsilon_n, \quad n \geq 1,$$
où $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. L'observation du mobile est entachée d'erreur :
$$Y_n = X_n + \eta_n, \quad n \geq 1,$$
où $(\eta_n)_{n\geq 1}$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0, \alpha^2)$, indépendantes de $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$. Notre objectif est de construire la meilleure estimation de X_n étant donnée l'information $\mathcal{F}_n := \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$ associée aux observations, ainsi que l'erreur associée à cette estimation :
$$\hat{X}_n := \mathbb{E}(X_n \mid \mathcal{F}_n), \quad \rho_n^2 := \mathbb{E}((X_n - \hat{X}_n)^2).$$
   a) Déterminer la loi conditionnelle $\mathrm{Loi}(X_1 \mid Y_1)$ et en déduire $\hat{X}_1$ et ρ_1 ;
   b) Montrer que $\mathrm{Loi}(X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \mathcal{N}(\hat{X}_{n-1}, \rho^2_{n-1})$;
   c) En déduire les lois conditionnelles $\mathrm{Loi}(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1})$ et $\mathrm{Loi}(X_n \mid \mathcal{F}_n)$;
   d) En déduire que
$$\hat{X}_n = \rho_n^2\left(\frac{a + \hat{X}_{n-1}}{\sigma^2 + \rho^2_{n-1}} + \frac{Y_n}{\alpha^2}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\rho_n^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\sigma^2 + \rho^2_{n-1}}.$$

Exercice 2.7 (Filtre de Kalman-Bucy multivarié – Tiré de Pardoux (2008) § 5.5.2)**.** On s'intéresse à la trajectoire à temps discret d'un point mobile dans $\mathbb{R}^d$, modélisée par une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^d$. On dispose d'observations instrumentales bruitées modélisées par une suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^k$. On modélise la loi de ces suites en utilisant les équations de récurrence linéaires de premier ordre suivantes :

$$X_n = AX_{n-1} + \varepsilon_n \quad \text{et} \quad Y_n = HX_n + \eta_n, \quad n \geq 1,$$

où les matrices $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et $H \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ sont déterministes, les vecteurs aléatoires $X_0, \varepsilon_1, \eta_1, \varepsilon_2, \eta_2, \ldots$ sont mutuellement indépendants, avec $X_0 \sim \mathcal{N}(m_0, P_0)$, et, pour tout $n \geq 1$, $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0, Q)$ et $\eta_n \sim \mathcal{N}(0, R)$, avec R inversible (donc symétrique définie positive).

1. Complément de Schur en algèbre linéaire : dans une matrice par blocs

$$M := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R}) \text{ avec } D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R}) \text{ inversible}$$

on appelle complément de Schur du bloc D la matrice $S := A - BD^{-1}C$. En utilisant

$$L := \begin{pmatrix} I & 0 \\ -D^{-1}C & D^{-1} \end{pmatrix},$$

montrer que M est inversible si et seulement si S est inversible. En utilisant

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -D^{-1}C & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

montrer que lorsque M est symétrique alors M est définie positive si et seulement si le bloc D et son complément de Schur S le sont ;

2. Lois conditionnelles des vecteurs gaussiens : montrer que si

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{22} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \right)$$

est un vecteur aléatoire gaussien de $\mathbb{R}^{d+k}$ avec Σ_{22} inversible alors

$$\mathrm{Loi}(X \mid Y) = \mathcal{N}(\hat{X}, \hat{\Sigma})$$

où

$$\hat{X} := \bar{X} + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(Y - \bar{Y}) \quad \text{et} \quad \hat{\Sigma} := \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}.$$

3. Lois conditionnelles des vecteurs gaussiens : montrer que si $(X, Y, Z)^\top$ est un vecteur aléatoire gaussien de $\mathbb{R}^{d+k+\ell}$ avec Y et Z indépendants alors

$$\mathrm{Loi}(X \mid Y) = \mathcal{N}(\hat{X}, \hat{\Sigma}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Loi}(X \mid Y, Z) = \mathcal{N}(\hat{\hat{X}}, \hat{\hat{\Sigma}})$$

où $\hat{X}$ et $\hat{\Sigma}$ sont comme dans la question précédente, et où, en notant $\bar{X} := \mathbb{E}(X)$,

$$\hat{\hat{X}} := \hat{X} + \mathbb{E}(X - \bar{X} \mid Z) \quad \text{et} \quad \hat{\hat{\Sigma}} := \hat{\Sigma} - \mathrm{Cov}(\mathbb{E}(X - \bar{X} \mid Z)).$$

4. Filtrage : montrer que $\mathrm{Loi}(X_n \mid Y_1, \ldots, Y_n) = \mathcal{N}(\hat{X}_n, \Lambda_n)$ pour tout $n \geq 1$, où les suites $(\hat{X}_n)_{n\geq 0}$ et $(\Lambda_n)_{n\geq 0}$ vérifient les équations de récurrence

$$\begin{aligned} \hat{X}_{n+1} &= A\hat{X}_n + \Sigma_n H^\top (H\Sigma_n H^\top + R)^{-1}(Y_{n+1} - HA\hat{X}_n) \\ \Lambda_{n+1} &= \Sigma_n - \Sigma_n H^\top (H\Sigma_n H^\top + R)^{-1} H\Sigma_n \end{aligned}$$

où $\Sigma_n := A\Lambda_n A^\top + Q$, avec les conditions initiales $\hat{X}_0 = m_0$ et $\Lambda_0 = P_0$;

5. La méthode est-elle utilisable si $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ et $(\eta_n)_{n\geq 1}$ ne sont plus stationnaires ?

Feuille d'exercice 3

Équations et processus ARMA

Exercice 3.1 (ARMAda ou ARMArtial)**.** Soit (Z_t) un bruit blanc. Pour chacune des équations suivantes, existe-t-il un processus stationnaire (X_t) solution ?

1. $X_t + 0.2X_{t-1} - 0.48X_{t-2} = Z_t$;
2. $X_t + 1.9X_{t-1} + 0.88X_{t-2} = Z_t + 0.2Z_{t-1} + 0.7Z_{t-2}$;
3. $X_t + 0.6X_{t-2} = Z_t + 1.2Z_{t-1}$;
4. $X_t + 1.8X_{t-1} + 0.81X_{t-2} = Z_t$.

Exercice 3.2 (ARMA$(1,1)$)**.** On considère l'équation

$$X_t - \phi X_{t-1} = Z_t + \theta Z_{t-1},$$

où (Z_t) est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance σ^2 et ϕ et θ sont des réels.

1. À quelles conditions sur ϕ et θ existe-t-il un processus (X_t) stationnaire solution de l'équation ci-dessus ?
2. À quelles conditions cette solution est-elle causale ? inversible ?

Dans la suite on supposera que ces conditions sont vérifiées.

3. Donner une représentation de la solution (X_t) sous la forme d'une somme infinie $\sum \psi_k Z_{t-k}$. On justifiera la convergence de cette somme, on précisera en quel sens elle converge et on donnera la valeur des coefficients $(\psi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.
4. Calculer la fonction d'autocorrélation de (X_t).

Exercice 3.3 (Inspiré de l'examen partiel 2016-2017)**.** Soit $Z \sim \mathrm{BB}\big(0,\sigma^2\big)$.

1. Préciser les polynômes Φ et Θ de l'équation ARMA$(1,2)$

$$X_t - 3X_{t-1} = Z_t - \frac{10}{3}Z_{t-1} + Z_{t-2}$$

et montrer qu'il existe une unique solution stationnaire ;
2. Cette solution est-elle causale ? Est-ce que Φ s'annule sur le disque unité ?
3. Calculer explicitement cette solution en fonction de Z ;
4. Cette solution est-elle inversible ?

Exercice 3.4 (Inspiré de l'examen partiel 2016-2017)**.** Soit $p \geq 1$ un entier et $Z \sim \mathrm{BB}(0,\sigma^2)$.

1. Préciser les polynômes Φ et Θ de l'équation AR(p) $X_t - X_{t-p} = Z_t$. Est-ce que Φ s'annule sur le cercle unité ? Peut-on en déduire que l'équation n'a pas de solution ?

2. Démontrer par l'absurde que l'équation n'a pas de solution stationnaire.

Exercice 3.5 (Produit d'ARMA)**.** On considère (X_t) et (Y_t) deux processus centrés et indépendants *i.e.* X_t et Y_s sont indépendants pour tous t, s. On définit le processus (Z_t) par $Z_t = X_t Y_t$. Soient (ϵ_t) et (η_t) deux bruits blancs. On suppose que (X_t) et (Y_t) sont des ARMA(1,1) de paramètres respectifs ϕ_1, θ_1 et ϕ_2, θ_2 et de bruits blancs respectifs $(\epsilon_t), (\eta_t)$.

1. À quelles conditions peut-on écrire $X_t = \sum_{j\geq 0} \psi_j \epsilon_{t-j}$ et $Y_t = \sum_{j\geq 0} \widetilde{\psi}_j \eta_{t-j}$? Supposons ces conditions vérifiées dans la suite ;
2. À quelles conditions X et Y sont inversibles ? Supposons ces conditions vérifiées dans la suite ;
3. Montrer que les processus (ϵ_t) et (η_t) sont décorrélés ;
4. Calculer la fonction d'autocorrélation du processus (Z_t).

Exercice 3.6 (ARMA(2,1))**.** On considère le processus (X_t) solution de

$$(1 - B + B^2/4)X_t = (1 + B)Z_t,$$

où (Z_t) est un bruit blan de variance σ^2.

1. Montrer que l'on peut écrire X_t sous la forme $X_t = \sum_{k\geq 0} \psi_k Z_{t-k}$.
2. Calculer les coefficients $(\psi_k)_{k\geq 0}$.
3. Calculer la fonction d'autocovariance de (X_t).

Exercice 3.7 (Solution MA(1) d'une équation AR(∞) à filtre exponentiel)**.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $0 < |\lambda| < 1$ et soit $\varphi_k = -\lambda^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit Z un $\mathrm{BB}\big(0, \sigma^2\big)$. Montrer que processus MA(1) $X_t = Z_t - \lambda Z_{t-1}$ est solution de l'équation AR(∞)

$$X_t = Z_t + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_{t-k} = Z_t - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k X_{t-k}.$$

Notons qu'en quelque sorte, dans cette équation AR(∞), on a $\Theta(z) = 1$, tandis que $\Phi(z) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k z^k = 1/(1 - \lambda z)$ (pour $|\lambda z| < 1$) n'est pas un polynôme. L'équation $\Phi(z) = 0$ en z n'a pas de solution. La formule $\Theta(z)/\Phi(z) = 1 - \lambda z$ suggère bien que le processus linéaire $X_t = Z_t - \lambda Z_{t-1}$, qui est un MA(1), est solution de l'équation AR(∞). Nous savions qu'un AR(1) causal est un MA(∞). Nous avons le cas dual ici : un AR(∞) causal est un MA(1). Plus généralement, l'analyse des ARMA(∞, ∞) peut être menée en étudiant les inverses des suites sommables à support infini, ce qui conduit à utiliser des outils d'analyse complexe comme les fonctions méromorphes et les séries de Laurent.

Exercice 3.8 (Processus stationnaires vectoriels – Tiré de l'examen final 2015-2016)**.** Soit $d \geq 1$ un entier et $\sigma^2 > 0$ un réel. Pour tout $t \in \mathbb{Z}$, soit $Z_t = (Z_{t,1}, \ldots, Z_{t,d})^\top$ un vecteur aléatoire centré de $\mathbb{R}^d$. On suppose que pour tous $s, t \in \mathbb{Z}$ et tous $j, k \in \{1, \ldots, d\}$ on a

$$\mathbb{E}(Z_{s,j} Z_{t,k}) = \sigma^2 \mathbf{1}_{s=t, j=k}.$$

1. Soit $\Phi \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice carrée telle que $\|\Phi\|_{2\to 2} := \max_{x\in\mathbb{R}^d : \|x\|_2 = 1} \|\Phi x\|_2 < 1$. Construire un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ à valeurs vectorielles solution de l'équation AR(1) vectorielle $X_t = \Phi X_{t-1} + Z_t$, $t \in \mathbb{Z}$. Démontrer qu'il est unique en un sens à définir ;
2. Soit X le processus obtenu dans la question précédente. Supposons que Φ est diagonale. Donner une condition suffisante sur Z pour que les processus marginaux $(X_{t,1})_{t\in\mathbb{Z}}, \ldots, (X_{t,d})_{t\in\mathbb{Z}}$ soient indépendants (justifier la réponse).

FEUILLE D'EXERCICE **4**

Mesure et densité spectrales

Sauf mention explicite du contraire, les suites et les coefficients sont réels.

Exercice 4.1 (Processus AR(1))**.** Soit (X_t) une solution stationnaire de l'équation AR(1) $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$ où $(Z_t) \sim \mathrm{BB}(0, \sigma^2)$ et $\varphi \in \mathbb{R}$ avec $|\varphi| \neq 1$.

1. Calculer la densité spectrale du bruit blanc Z ;
2. Démontrer que si Y est un processus stationnaire et si $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$ alors la mesure spectrale ν_{F_α} du filtre $F_\alpha Y$ est absolument continue par rapport à la mesure spectrale ν_Y de Y, et sa densité est donnée par
$$\lambda \in [-\pi, \pi] \mapsto \frac{\mathrm{d}\nu_{F_\alpha Y}(\lambda)}{\mathrm{d}\nu_Y(\lambda)} = \left| \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_j \mathrm{e}^{-ij\lambda} \right|^2.$$
En particulier, en déduire que si Y possède une densité spectrale alors $F_\alpha Y$ également, et donner une formule liant les deux.
3. Calculer la densité spectrale de X ;
4. Montrer qu'il existe un processus stationnaire $\widetilde{X}$ de même autocovariance que X, solution de l'équation AR(1) $\widetilde{X}_t = \phi^{-1}\widetilde{X}_{t-1} + Z'_t$, où $(Z'_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit à préciser. Quelle est sa densité spectrale ? Que se passe-t-il si X est gaussien ?;
5. Mêmes questions lorsque (X_t) est solution de $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ avec $|\theta| > 1$.

Exercice 4.2 (Herglotz)**.** Démontrer en utilisant le théorème de Herglotz que la fonction
$$h \in \mathbb{Z} \mapsto \rho(h) := \mathbf{1}_{h=0} + \alpha \mathbf{1}_{|h|=1} \in \mathbb{R},$$
est une fonction d'autocovariance si et seulement si $|\alpha| \leq 1/2$.

Exercice 4.3 (Somme)**.** Soient (X_t) et (Y_t) deux processus stationnaires, centrés et indépendants.

1. Justifier la stationnarité du processus $S_t := X_t + Y_t$;
2. Calculer la mesure (et la densité le cas échéant) spectrale de S en fonction de celles de X et Y ;
3. Montrer que le processus $Z_t := X_t Y_t$ est stationnaire et calculer sa fonction d'autocovariance ;
4. On rappelle que le produit de convolution de deux fonctions f et g supposées 2π-périodiques est défini par
$$f \star g(x) := \int_{-\pi}^{\pi} f(u) g(x-u) du.$$
Calculer $f_X \star f_Y$ et en déduire f_Z.

Exercice 4.4 (Harmonique)**.** Soit (X_t) le processus défini par

$$X_t := A\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) + B\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) + Y_t,$$

où A et B sont deux variables aléatoires réelles indépendantes, centrées, et de variance σ^2 et où Y est un processus stationnaire indépendants de A et B.

1. Calculer la fonction d'autocovariance et la mesure spectrale de X lorsque Y est un bruit blanc de variance σ_Y^2. Indication : masses de Dirac.
2. Même question quand Y est un MA(1) de paramètre θ.

Exercice 4.5 (Bestiaire)**.** Parmi les fonctions suivantes, lesquelles peuvent être des densités spectrales ?

1. $f(\lambda) = 1 - \frac{\lambda^2}{2}$.
2. $f(\lambda) = 1 + \frac{\lambda}{2}$.
3. $f(\lambda) = 476 + \cos(14\lambda)$.

Exercice 4.6 (Bande)**.** Soit un processus stationnaire Y de densité spectrale $f(\lambda)$ t.q.

$$0 \leq m \leq f(\lambda) \leq M < +\infty.$$

Pour $n \geq 1$ on note γ_n la matrice de covariance de $(Y_1, ..., Y_n)$. Montrer que les valeurs propres de γ_n sont dans un intervalle dont on précisera les bornes.

Feuille d'exercice **5**

Prédiction

Exercice 5.1 (Processus déterministes)**.**

1. Montrer que pour tout processus du second ordre $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, les propriétés suivantes sont équivalentes (on dit alors que le processus est déterministe) :
   a) pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $X_t \in H_{t-1} := \overline{\mathrm{vect}\{X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots\}}$;
   b) pour tout $t \in \mathbb{Z}$, dans L^2, $X_t = \mathrm{proj}(X_t, H_{t-1})$.
2. Si $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire, montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   a) X est déterministe ;
   b) il existe un $t \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathbb{E}((X_t - \mathrm{proj}(X_t, H_{t-1}))^2) = 0$;
   c) pour tout $t \in \mathbb{Z}$ on a $\mathbb{E}((X_t - \mathrm{proj}(X_t, H_{t-1}))^2) = 0$;
3. Montrer qu'un processus harmonique est toujours déterministe ;
4. Donner un exemple de processus non déterministe.

Exercice 5.2 (Lissage exponentiel)**.** Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.r. On veut prédire la valeur X_{n+1} située dans le futur de la série observée $X_1, \ldots, X_n$.

1. Considérons l'estimateur des moindres carrés pondérés
$$\arg\min_{a\in\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k (X_{n-k} - a)^2$$
où λ est un réel fixé tel que $0 < \lambda < 1$, qui joue le rôle de paramètre de lissage[1]. Montrer que cet estimateur des moindres carrés pondérés vaut
$$\frac{1-\lambda}{1-\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k X_{n-k}.$$
2. En pratique on utilise une formule approchée plus simple basée sur le fait que $\lim_{n\to\infty} \frac{1-\lambda}{1-\lambda^n} = 1 - \lambda$. Montrer que l'**estimateur de lissage exponentiel simple**
$$\hat{X}_n := (1-\lambda) \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k X_{n-k}$$
vérifie l'agréable formule de mise à jour récursive suivante :
$$\hat{X}_{n+1} = \lambda \hat{X}_n + (1-\lambda) X_{n+1} = \hat{X}_n + \underbrace{(1-\lambda)(X_{n+1} - \hat{X}_n)}_{\text{innovation}}.$$

1. Les poids affectés à $X_n, X_{n-1}, \ldots, X_1$ sont décroissants $1 = \lambda^0, \ldots, \lambda^{n-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. Montrer la formule du **lissage exponentiel double** :

$$\hat{\hat{X}}_n = (1-\lambda)^2 \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\lambda^k X_{n-k} = (1-\lambda)\hat{X}_n + (1-\lambda)^2 \sum_{k=0}^{n-1} k\lambda^k X_{n-k}.$$

4. À présent on approche la série temporelle par une droite au voisinage de n. Montrer que pour tout paramètre de lissage $0 < \lambda < 1$, l'estimateur des moindres carrés

$$(\hat{a}_n, \hat{b}_n) := \arg\min_{a,b\in\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k (X_{n-k} - (ak+b))^2$$

vérifie, quand $n \to \infty$,

$$\hat{a}_n \sim \frac{1-\lambda}{\lambda}(\hat{\hat{X}}_n - \hat{X}_n) \quad \text{et} \quad \hat{b}_n \sim 2\hat{X}_n - \hat{\hat{X}}_n.$$

Exercice 5.3 (Inversibilité de la matrice d'autocovariance)**.** On souhaite démontrer la propriété suivante : si $(\gamma_n)_{n\geq 1} = (\gamma(i-j))_{1\leq i,j\leq n}$ sont les matrices d'autocovariance d'un processus stationnaire centré $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ d'autocovariance γ telle que $\gamma(0) > 0$ et $\gamma(h) \to 0$ quand $h \to \infty$, alors γ_n est inversible pour tout n. Supposons donc qu'il existe $r \geq 1$ tel que γ_r soit inversible et γ_{r+1} soit singulière.

1. Montrer que pour tout $n \geq r+1$, il existe $b^{(n)} \in \mathbb{R}^r$ tel que

$$X_n = \sum_{j=1}^{r} b_j^{(n)} X_j;$$

2. Montrer que les b_j sont uniformément bornés ;
3. Conclure lorsque $\gamma(0) > 0$ et $\lim_{t\to\infty} \gamma(t) = 0$.

Exercice 5.4 (Prédiction de processus autorégressifs)**.** Soient $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus stationnaire centré et $H_n = \mathrm{vect}(X_1, \ldots, X_n)$. On rappelle que le prédicteur à un pas $\hat{X}_{n+1}$ est défini par $\hat{X}_{n+1} = 0$ si $n = 0$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$\hat{X}_{n+1} = \varphi_{n,1}X_n + \cdots + \varphi_{n,n}X_1,$$

où les $\varphi_{n,i}$ vérifient les équations dites de Yule-Walker

$$\gamma_n \varphi_n = \gamma_n$$

avec $\gamma_n = (\gamma(i-j))_{1\leq i,j\leq n}$, $\gamma_n = (\gamma(1), \ldots, \gamma(n))^\top$, et $\varphi_n = (\varphi_{n,1}, \ldots, \varphi_{n,n})^\top$.

1. On suppose que $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus AR(1) causal tel que $X_t - \varphi_1 X_{t-1} = Z_t$ où $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ^2. Calculer $\hat{X}_2$. Montrer que $\hat{X}_3 = \varphi_1 X_2$. Montrer de façon plus générale qe $\hat{X}_n = \varphi_1 X_n$ pour tout $n \geq 1$
2. On suppose que $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus AR(2) causal tel que $X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \varphi_2 X_{t-2} = Z_t$, où $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ^2. Calculer $\hat{X}_2$. Montrer que $\hat{X}_{n+1} = \varphi_1 X_n + \varphi_2 X_{n-1}$
3. Lorsque $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un AR(p) causal, montrer que pour tout $n \geq p$, $\hat{X}_{n+1} = \varphi_1 X_1 + \varphi_2 X_{n-1} + \cdots + \varphi_p X_{n-p+1}$.

Exercice 5.5 (Prédiction de processus ARMA)**.** Soient $\mathcal{M}_n = \overline{\mathrm{vect}(X_j : -\infty < j \leq n)}$ et $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus ARMA(p,q) causal et inversible satisfaisant : $\Phi(B)X = \theta(B)Z$ où $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ^2. On pose : $\tilde{X}_t = \mathrm{proj}_{\mathcal{M}_n} X_t$.

1. Montrer que pour tout $h \geq 1$ on a

$$\tilde{X}_{n+h} = -\sum_{j\geq 1} \pi_j \tilde{X}_{n+h-j} \quad \text{et} \quad \tilde{X}_{n+h} = \sum_{j\geq h} \psi_j Z_{n+h-j},$$

où $\sum_{j\geq 0} \pi_j z^j = \frac{\Phi(z)}{\theta(z)}$ et $\sum_{j\geq 0} \psi_j z^j = \frac{\theta(z)}{\Phi(z)} q$, $|z| \leq 1$. De plus, montrer que

$$\mathbb{E}((X_{n+h} - \tilde{X}_{n+h})^2) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2;$$

2. Calculer $\tilde{X}_{n+1}$ pour un AR(p) causal et un MA(1) inversible.

Exercice 5.6 (Prédiction d'un MA(1) et algorithme des innovations)**.** On rappelle ci-dessous l'algorithme des innovations. Celui-ci est lié à l'algorithme de Gram-Schmidt et peut s'appliquer à un processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ non-stationnaire. On suppose que ce processus est de moyenne nulle et de fonction d'autocovariance

$$\kappa(i,j) = \mathbb{E}(X_i X_j).$$

Rappelons que $\mathcal{H}_n = \text{vect}(X_1, \ldots, X_n)$ et $v_n = \left\| X_{n+1} - \hat{X}_{n+1} \right\|^2$. On a, en posant $\hat{X}_1 = 0$,

$$\mathcal{H}_n = \text{vect}(X_1 - \hat{X}_1, X_2 - \hat{X}_2, \ldots, X_n - \hat{X}_n), \text{ pour tout } n \geq 1$$

de telle sorte que

$$\hat{X}_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} \theta_{n,j} \left(X_{n+1-j} - \hat{X}_{n+1-j} \right).$$

L'algorithme des innovations est une méthode récursive de calcul de $(\theta_{n,j})_{1\leq j\leq n}$ et v_n :

$$\hat{X}_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} \theta_{n,j}(X_{n+1-j} - \hat{X}_{n+1-j}) & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} v_0 & = \kappa(1,1); \\ \theta_{n,n-k} & = v_k^{-1}\Big(\kappa(n+1,k+1) - \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{k,k-j}\theta_{n,n-j} v_j\Big), \quad k = 0,1,\ldots,n-1; \\ v_n & = \kappa(n+1,n+1) - \sum_{j=0}^{n-1} \theta_{n,n-j}^2 v_j. \end{cases}$$

Proposer une façon de prédire un MA(1) en utilisant l'algorithme des innovations.

Feuille d'exercice 6

Estimation

Exercice 6.1 (Estimation de la moyenne et intervalle de confiance)**.** Soit $Y_t = \theta + X_t$, où (X_t) est un AR(1) défini par $X_t - \phi X_{t-1} = Z_t$, où $|\phi| < 1$ et les Z_t sont indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. On cherche à estimer θ à partir de $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$. On note $\widehat{\theta}_n$ la moyenne empirique de $Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ définie par

$$\widehat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} Y_i.$$

1. Calculer $\lim_{n\to\infty} n\mathbb{V}(\widehat{\theta}_n)$ et donner l'expression de γ défini par
$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \gamma).$$
2. On choisit $\phi = 0.6$ et $\sigma^2 = 2$. Lorsqu'on observe $n = 100$ valeurs, on obtient $\widehat{\theta}_n = 0.271$. Construire un intervalle de confiance asymptotique à 95% pour θ. Peut-on dire que $\theta = 0$?
3. On propose un autre estimateur de θ défini par $\widetilde{\theta}_n = (\mathbf{1}_n^\top \gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n)^{-1} \mathbf{1}_n^\top \gamma_n^{-1} Y^{(n)}$ où $Y^{(n)} = (Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-1})^\top$, $\mathbf{1}_n = (1, \ldots, 1)^\top$ et γ_n est la matrice de covariance de $Y^{(n)}$. Justifier le choix de cet estimateur ;
4. Calculer $\lim_{n\to\infty} n\mathbb{V}(\widetilde{\theta}_n)$. Qu'en concluez-vous ?

Exercice 6.2 (Comparaison de différents estimateurs dans le cas d'un MA(1))**.** Soit un processus MA(1) défini par $X_t = Z_t + \theta Z_{t-1}$ où $|\theta| < 1$ et (Z_t) est un bruit blanc.

1. Proposer un estimateur $\widehat{\theta}_n^{(1)}$ de θ en utilisant la méthode des moments (c'est-à-dire en utilisant un estimateur de la fonction d'autocorrélation) ;
2. Donner le comportement asymptotique de $\widehat{\rho}(1)$;
3. En déduire le comportement asymptotique de $\widehat{\theta}_n^{(1)}$;
4. Calculer l'efficacité relative de $\widehat{\theta}_n^{(1)}$ et $\widehat{\theta}_n^{(2)}$ obtenu en utilisant l'algorithme des innovations dont on admettra qu'il satisfait :
$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n^{(2)} - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1);$$
5. Calculer l'efficacité relative de $\widehat{\theta}_n^{(2)}$ et $\widehat{\theta}_n^{(3)}$ obtenu obtenu par la méthode du maximum de vraisemblance dont on admettra qu'il satisfait :
$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n^{(3)} - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1 - \theta^2).$$

Mathématiques et Informatique de la Décision et des Organisations

Introduction aux séries temporelles

Master 1 Mathématiques Appliquées

Correction succincte des exercices de travaux dirigés

Année 2016/2017

Quartier d'affaires de la Défense et bois de Boulogne
Vus du bureau B518-bis de l'Université Paris-Dauphine

DAUPHINE UNIVERSITÉ PARIS | MIDO MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE DE LA DECISION ET DES ORGANISATIONS

Version électronique composée avec LaTeX le 30 janvier 2017

- Auteurs principaux des exercices et solutions :
  - Djalil Chafaï (enseignant Paris-Dauphine, 2013–)
  - Céline Duval (enseignant Paris-Dauphine, 2012–2013)
  - Céline Lévy-Leduc (enseignant Paris-Dauphine, 2010–2012)
- Contributeurs ou chasseurs de coquilles :
  - Marc Hoffmann (enseignant Paris-Dauphine, 2012–2013)
  - Stéphane Ivanoff (enseignant Paris-Dauphine, 2013–2015)
  - Camille Pagnard (enseignant Paris-Dauphine, 2014–)
  - Dylan Possamaï (enseignant Paris-Dauphine, 2012–)
  - Tan, Xiaolu (enseignant, Paris-Dauphine, 2016–)

Feuille d'exercice **1**

Tendance, stationnarité, autocovariance, opérateur retard

Solution succincte de l'exercice 1.1 (Quelques exemples)**.** Évidemment, il est impossible de réfuter la stationnarité sans imposer un modèle structurel (partie déterministe + bruit par exemple). La série de la population comporte une tendance et n'est donc pas modélisable par un processus stationnaire. La série de la température à Nottingham comporte une saisonnalité et n'est donc pas modélisable par un processus stationnaire. La série des accidents de la route comporte à la fois une saisonnalité et une tendance et n'est donc pas modélisable par un processus stationnaire. Dans les trois cas, il faudrait utiliser un modèle avec une partie déterministe, et un bruit éventuellement stationnaire.

Une droite horizontale peut très bien être la réalisation d'un processus stationnaire constamment égal à une variable aléatoire donnée (constante ou pas). Une sinusoïde peut très bien être la réalisation d'un processus stationnaire comme le processus harmonique. La morale est que l'observation d'une trajectoire fournit un échantillon de taille 1 de la loi de la trajectoire, et ne nous renseigne donc pas beaucoup sur la variabilité du processus, sauf à faire une hypothèse de structure qui va réduire la dimension intrinsèque du signal et permettre de convertir l'observation d'une seule trajectoire en un échantillon de taille importante de paramètres de structure. Plus généralement, et bien au delà des séries temporelles, on peut espérer reconstituer approximativement un signal observé dans un espace de grande dimension à condition que sa dimension structurelle ou intrinsèque soit assez petite par rapport à la dimension de l'espace dans lequel on l'observe. Cette idée très générale est à la base des méthodes statistiques pour l'analyse des données de grande dimension : sparsité, compressed sensing, pénalisation ℓ^1 ou variation totale, etc.

Solution succincte de l'exercice 1.2 (Stationnarité et stationnarité stricte)**.**

1. Condi. : $\mathbb{P}(Y \in I) = \mathbb{P}(X \in I)\frac{1}{2} + \mathbb{P}(-X \in I)\frac{1}{2} = \mathbb{P}(X \in I)$ car $X \overset{\text{loi}}{=} -X$;
2. Par linéarité : $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(\mathbf{1}_{U=1}) - \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(\mathbf{1}_{U=0}) = 0$ mais $\mathrm{Loi}(Y|X=x) = \frac{1}{2}(\delta_{-x} + \delta_x) \neq \mathrm{Loi}(Y)$ donc X et Y ne sont pas indépendantes.
3. Soit $X_0 = X$ et $X_t = \varepsilon_t X$ si $t \neq 0$, où les $(\varepsilon_t)_{t\neq 0}$ sont i.i.d. Rademacher $\mathbb{P}(\varepsilon_t = \pm 1) = 1/2$ et indépendantes de X. On a $\mathrm{E}(X_t) = 0$ et $\mathrm{Var}(X_t) = 1$ pour tout t. De plus, pour tous $s \neq t$, si $s \neq 0$ et $t \neq 0$ alors $\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(\varepsilon_s)\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0$, tandis que si $s = 0$ ou si $t = 0$ alors d'après ce qui précède $\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = 0$.

Solution succincte de l'exercice 1.3 (Marche aléatoire)**.**

1. Pour tout $t \geq 0$, on a $X_t = t\mu + Z_1 + \cdots + Z_t = t\mu + S_t$ d'où $\mathbb{E}(X_t) = t\mu$, et pour tout $s \leq t$, $\gamma_X(t, t+h) = \mathbb{E}((X_t - t\mu)(X_{t+h} - (t+h)\mu)) = \mathbb{E}(S_t(S_t + S'_h)) = \mathbb{E}(S_t^2) = \sigma^2 t$ qui dépend de t. Ainsi, même si $\mu = 0$, le processus n'est pas stationnaire.
2. On a $\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = \mu + Z_t$ qui est stationnaire.

Solution succincte de l'exercice 1.4 (Somme de processus stationnaires)**.** Par linéarité de l'espérance $\mu_Z = \mu_X + \mu_Y$ qui est constante tandis que par bilinéarité de la covariance

$$\gamma_Z(t, t+h) = \gamma_X(t, t+h) + \gamma_Y(t, t+h) + \mathrm{Cov}(X_t, Y_{t+h}) + \mathrm{Cov}(Y_t, X_{t+h}) = \gamma_x(h) + \gamma_Y(h)$$

qui ne dépend pas de t et donc Z est stationnaire.

Solution succincte de l'exercice 1.5 (Stationnarité de processus)**.**

1. Non stationnaire car μ_X non constante ;
2. Non stationnaire car $\gamma_X(t, t+h) = \mathbb{E}((Z_1 + \cdots + Z_t)^2) = \sigma^2 t$ dépend de t ;
3. Stationnaire MA(1) car $\mu_X = 0$ et $\gamma_X(t, t+h) = \sigma^2(1 + \theta^2)\mathbf{1}_{h=0} + \sigma^2\theta\mathbf{1}_{|h|=1}$
4. Stationnaire bruit blanc (faible) car $\mu_X = 0$ et $\gamma_X(t, t+h) = \sigma^4\mathbf{1}_{h=0}$
5. Non stationnaire car $X_t = 2Z_t\mathbf{1}_{t \text{ pair}}$ d'où $\mathrm{Var}(X_t) = 4\sigma^2\mathbf{1}_{t \text{ pair}}$ non constante.

Solution succincte de l'exercice 1.6 (Processus harmonique)**.** On a

$$\mu_X(t) = \mathbb{E}(A)\cos(\theta t) + \mathbb{E}(B)\sin(\theta t) = 0$$

et

$$\begin{aligned}
\gamma_X(t, t+h) &= \mathbb{E}(A^2)\cos(\theta t)\cos(\theta(t+h)) + \mathbb{E}(B^2)\sin(\theta t)\sin(\theta(t+h)) + \overbrace{\mathbb{E}(AB)}^{=0}\cdots \\
&= \sigma^2\mathfrak{Re}(\mathrm{e}^{i\theta t}\mathrm{e}^{-i\theta(t+h)}) \\
&= \sigma^2\mathfrak{Re}(\mathrm{e}^{-i\theta h}) \\
&= \sigma^2\cos(\theta h)
\end{aligned}$$

qui ne dépend pas de t. Le processus est donc stationnaire (à trajectoires régulières !)

Solution succincte de l'exercice 1.7 (Propriété de la fonction d'autocovariance)**.**

1. On a $\gamma(-h) = \mathrm{Cov}(X_{-h}, X_0) = \mathrm{Cov}(X_0, X_h) = \gamma(h)$, et pour tout $n \geq 1$ et $v \in \mathbb{R}^n$,

$$(\langle v, \gamma_n v\rangle =) \sum_{1\leq j,k\leq n} v_j\gamma(k-j)v_k = \sum_{1\leq j,k\leq n}\mathrm{Cov}(v_jX_j, v_kX_k) = \mathrm{Var}\left(\sum_{j=1}^n v_jX_j\right) \geq 0;$$

2. La symétrie est vérifiée. Dire que ρ est de type positif revient à dire que pour tout $n \geq 0$, la matrice de Toeplitz symétrique tridiagonale suivante est de type positif :

$$\gamma_n = (\gamma(j-k))_{1\leq j,k\leq n} = \begin{pmatrix} 1 & \rho & & \\ \rho & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \rho \\ & & \rho & 1 \end{pmatrix}.$$

Bien que praticable, la diagonalisation des matrices tridiagonales est une chose bien délicate. Faisons autrement : montrons que si $|\rho| \leq 1/2$ alors γ est la fonction d'autocovariance d'un processus X solution de l'équation MA(1) : $X_t = \theta X_{t-1} + Z_t$. On sait (exercice déjà vu) que $\gamma_X(h) = \sigma^2(1+\theta^2)\mathbf{1}_{h=0} + \sigma^2\theta\mathbf{1}_{h=\pm1}$, ce qui donne $\sigma^2\theta = \rho$ et $\sigma^2(1+\theta^2) = 1$, d'où, en éliminant la variable σ : $\rho(1+\theta^2) = \theta$, qui est un trinôme du second degré en θ de discriminant $\delta = 1 - 4\rho^2$, qui est ≥ 0 ssi $|\rho| \leq 1/2$ (ce qui donne une ou deux valeurs possibles pour le paramètre réel θ). Faisons maintenant l'hypothèse alternative que $|\rho| > 1/2$ et trouvons une valeur de n et un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ tels que $\langle v, \gamma_n v\rangle < 0$. Pour $\rho > 1/2$, en tâtonnant, on trouve que $v = (-1, 1, -1, \dots)^\top$ c'est-à-dire $v_j = (-1)^j$ convient car alors

$$\langle v, \gamma_n v\rangle = \sum_{1\leq j,k\leq n} (-1)^{j+k}\gamma_n(j,k) = n - 2(n-1)\rho = (n-1)\left(\frac{n}{n-1} - 2\rho\right)$$

qui est < 0 si $|\rho| > 1/2$ dès que $n > \frac{2\rho}{2\rho-1}$. Si $\rho < -1/2$, idem avec $v = (1, 1, 1, \dots)$;

3. a) Non car γ est impaire alors que toute fonction d'autocovariance est paire ;
   b) Fonction d'autocovariance de la somme $X + Y$ où X et Y sont des processus harmoniques indépendants à paramètres bien choisis (combinaison d'exercices déjà vus) ;
   c) Fonction d'autocovariance d'un processus harmonique à paramètres bien choisis.

Solution succincte de l'exercice 1.8 (Propriété de la fonction d'autocovariance – Bis)**.**

1. $\sigma_n = (1-\rho)I_n + \rho J_n$. La matrice $J_n = (1)_{1\leq j,k\leq n}$ est symétrique de type positif, de rang 1, avec pour valeurs propres 0 de multiplicité $n-1$ et $\mathrm{Tr}(J_n) = n$ de multiplicité 1. Par conséquent, la matrice symétrique σ_n a pour valeurs propres $1-\rho$ avec multiplicité $n-1$ et $1-\rho+\rho n$ avec multiplicité 1. La CNS recherchée est donc $\min(1-\rho, 1+(n-1)\rho) \geq 0$ pour tout $n \geq$, c'est-à-dire $-1/(n-1) \leq \rho \leq 1$ pour tout $n \geq 2$, soit $\rho \in [0,1]$. À ce sujet on rappelle le concept de matrice à diagonale dominante, et le théorème des disques de Gershgorin (démonstration en exercice) : pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $\mathrm{spec}(A) \subset \bigcup_{k=1}^n \bar{D}(A_{k,k}, \sum_{j\neq k}|A_{k,j}|)$;

   Autrement, supposons que σ_t est bien la matrice de variance covariance d'un processus X stationnaire. L'inégalité de Cauchy–Schwarz assure que $\rho^2 = \mathrm{Cov}(X_0, X_1)^2 \leq \mathrm{Var}(X_0)\mathrm{Var}(X_1) = 1$. De plus, puisque σ_t est symétrique de type positif pour tout $t \geq 2$, on doit avoir :

$$(1, \dots, 1)\sigma_t \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = t(1+(t-1)\rho) \geq 0$$

   D'oú $\rho \geq \sup_{t\geq 2} -1/(t-1) = 0$. De cette manière on prouve que la condition $0 \leq \rho \leq 1$ est nécéssaire, la question suivante prouve la suffisance.

2. Soit $X \sim \mathrm{BB}(0, 1-\rho)$, de sorte que $\gamma_X = (1-\rho)\mathbf{1}_{h=0}$, et Y un processus indépendant (non corrélé suffit) de X tel que $\mathrm{Var}(Y_0) = \rho$ et $Y_t = Y_0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Alors $\gamma_Y = \rho\mathbf{1}$, et, grâce à l'exercice sur la somme de processus, $\gamma_{X+Y} = (1-\rho)\mathbf{1}_{h=0} + \rho\mathbf{1}$.

Solution succincte de l'exercice 1.9 (Estimation de tendance et de saisonnalité)**.**

1. Le processus Y n'est pas stationnaire car sa moyenne dépend du temps : $\mu_Y(t) = \beta t + s_t$ (même si $\beta = 0$, on a $s \neq 0$ car s de période (minimale) 4) ;

2. On a $(1-B^4)(\beta t+s_t) = \beta t+s_t-\beta(t-4)-s_{t-4} = 4\beta$ d'où $(1-B^4)Y = 4\beta+(1-B^4)U$. On a $\gamma_{(1-B^4)Y}(t,t+h) = \gamma_{(1-B^4)U}(t,t+h) = \mathrm{Cov}(U_t - U_{t-4}, U_{t+h} - U_{t+h-4}) = \gamma_U(h) - \gamma_U(h-4) - \gamma_U(h+4) + \gamma_U(h)$. En fait, $(1-B^4)U$ est un filtre de U égal à $F_\alpha U$ où $\alpha_h = \mathbf{1}_{h=0} - \mathbf{1}_{h=4}$.

Solution succincte de l'exercice 1.10 (Tendance)**.**

1. $(1-B)X_t = \sum_{i=0}^k a_i(t^i - (t-1)^i) + U_t - U_{t-1}$ or par la formule du binôme

$$t^i - (t-1)^i = t^i - \sum_{j=0}^{i} t^j(-1)^{i-j}\binom{i}{j} = \sum_{j=0}^{i-1} t^j(-1)^{1+i-j}\binom{i}{j},$$

de degré $i-1$, et donc $(1-B)X$ a une tendance polynomiale de degré $k-1$. Par récurrence, il en découle que $(1-B)^pX$ a une tendance polynomiale de degré $k-p$ pour tout $p \in \{0,\dots,k\}$, et plus de tendance polynomiale si $p > k$. L'opérateur $(1-B)^p$ élimine donc toute tendance polynomiale de degré $< p$;

2. On applique l'opérateur différence saisonnier $1-B^d$:

$$(1-B^d)X_t = X_t - X_{t-d} + S_t - S_{t-d} = X_t - X_{t-d}.$$

Feuille d'exercice 2

Filtrage

Solution succincte de l'exercice 2.1 (Filtrage)**.**

1. Pour tout intervalle fini $I \subset \mathbb{Z}$ on pose $Y_t^I = \sum_{i\in I} a_i X_{t-i}$ de sorte que

$$\mathbb{E}\left|Y_t^I - Y_t^J\right| \leq \sup_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_i|) \sum_{i\in(I\cup J)\setminus I\cap J} |a_i|.$$

   Or $\sup_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_i|) \leq \sup_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_i|^2) = \mathbb{E}(|X_0|^2) < \infty$ car X est stationnaire. D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\{-n,\ldots,n\} \subset I \cap J$ implique $\sum_{i\in(I\cup J)\setminus I\cap J} |a_i| \leq \varepsilon$, grâce au critère de Cauchy pour la série $\sum_{i\in\mathbb{Z}} |a_i| < \infty$. Comme L^1 est un espace de Banach (espace vectoriel normé complet), il en découle que $Y_t = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i X_{t-i} = \sum_{I\to\mathbb{Z}} Y_t^I$ est bien définie dans L^1. Montons à présent que cette série converge p.s. et que sa somme p.s. coïncide avec sa somme dans L^1. Le théorème de convergence monotone (ou bien de Fubini–Tonelli) donne, dans $[0,\infty]$,

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} |a_i||X_{t-i}|\right) \leq \sup_{t\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}(|X_t|) \sum_{i\in\mathbb{Z}} |a_i| \leq \mathbb{E}(X_0^2)\,\|a\|_1 < \infty,$$

   et donc $\sum_{i\in\mathbb{Z}} |a_i||X_{t-i}| < \infty$ p.s. et donc $\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i X_{t-i}$ converge p.s. Enfin, la limite p.s. est identique à la limite L^1 par convergence dominée. Le processus en entier Y est défini p.s. sur l'ensemble p.s. obtenu en prenant l'intersection des ensembles p.s. obtenus pour chaque t dans $\mathbb{Z}$, qui a le bon goût d'être dénombrable ;
   Alternativement pour montrer que Y_t est bien définie, en utilisant le théorème de Fubini–Tonelli, on obtient $\mathbb{E}\left[\sum |a_i X_{t-i}|\right] = \sum |a_i| \mathbb{E}\left[|X_{t-i}|\right] \leq \sum |a_i| \sqrt{\mu_X^2 + \gamma_X(0)} < \infty$, ce qui assure, à nouveau via le théorème de Fubini–Tonelli que la variable aléatoire $Y_t := \sum a_i X_{t-i}$ est bien définie et intégrable (on peut la voir comme une fonction définie en intégrant $a_i X_{t-i}$ sur $\mathbb{Z}$ relativement à la mesure de comptage).

2. La partie «Cauchy» fonctionne dans tout $L^{p\geq 1}$:

$$\left\|Y_t^I - Y_t^J\right\|_p \leq \sum_{i\in(I\cup J)\setminus I\cap J} \|a_i X_i\|_p \leq \sup_{i\in\mathbb{Z}} \|X_i\|_p \sum_{i\in(I\cup J)\setminus I\cap J} |a_i|.$$

   Sinon, en applicant successivement le théorème de Fubini–Tunelli et l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum a_i X_{t-i}\right)^2\right] \leq \sum_{i,j} |a_i a_j| \mathbb{E}\left[|X_{t-i} X_{t-j}|\right] \leq \left(\sum |a_i|\right)^2 (\mu_X^2 + \gamma_X(0)) < \infty$$

3. Pour tout $t \in \mathbb{Z}$, par continuité du produit scalaire dans L^2,

$$\begin{aligned}\mu_Y(t) &= \langle 1, Y_t \rangle_{L^2} \\ &= \left\langle 1, \lim_{I\to\mathbb{Z}} Y_t^I \right\rangle_{L^2} \\ &= \lim_{I\to\mathbb{Z}} \left\langle 1, \sum_{i\in I} a_i X_{t-i} \right\rangle_{L^2} \\ &= \lim_{I\to\mathbb{Z}} \sum_{i\in I} a_i \mathbb{E}(X_{t-i}) \\ &= \mu_X \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i\end{aligned}$$

qui est constante. Pour l'autocovariance, on écrit, pour tous $t, h \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\gamma_Y(t,t+h) + \mu_Y^2 &= \left\langle \lim_{I\to\mathbb{Z}} Y_t^I, \lim_{J\to\mathbb{Z}} Y_{t+h}^J \right\rangle_{L^2} \\ &= \lim_{I,J\to\mathbb{Z}} \sum_{i\in I, j\in J} a_i a_j \mathbb{E}(X_{t-i}X_{t+h-j}) \\ &= \lim_{I,J\to\mathbb{Z}} \sum_{i\in I, j\in J} a_i a_j (\gamma_X(h+i-j) + \mu_X^2) \\ &= \mu_Y^2 + \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} a_i a_j \gamma_X(h+i-j) \\ &= \mu_Y^2 + \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} a_i a_j \gamma_X(h+j-i)\end{aligned}$$

qui ne dépend pas de t, et le processus Y est donc stationnaire.

Solution succincte de l'exercice 2.2 (Géométrique)**.**

1. On a $\mathbb{E}(X_t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. D'autre part, pour tous $t, h \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\gamma_X(t,t+h) &= \sum_{i=0}^{t}\sum_{j=0}^{t+h} \lambda^{i+j}\mathbb{E}((Z_{t-i}-Z_{t-i-1})(Z_{t+h-j}-Z_{t+h-j-1})) \\ &= \sum_{i=0}^{t}\sum_{j=0}^{t+h} \lambda^{i+j}(2\gamma_Z(h) - \gamma_Z(h-1) - \gamma_Z(h+1)) \\ &= \sigma^2(2\mathbf{1}_{h=0} - \mathbf{1}_{h=1} - \mathbf{1}_{h=-1}) \sum_{i=0}^{t}\sum_{j=0}^{t+h} \lambda^{i+j} \\ &= \sigma^2(2\mathbf{1}_{h=0} - \mathbf{1}_{h=1} - \mathbf{1}_{h=-1}) \begin{cases} \frac{1-\lambda^{t+1}}{1-\lambda}\frac{1-\lambda^{t+h+1}}{1-\lambda} & \text{si } \lambda \neq 1, \\ (1+t)(1+t+h) & \text{si } t = 1, \end{cases}\end{aligned}$$

qui dépend de t si $\lambda \neq 0$. Le seul cas stationnaire est $\lambda = 0$ (donne $X = 0$) ;

2. Si $|\lambda| < 1$ alors $\alpha_i = \lambda^i \mathbf{1}_{i\geq 0} \in \ell^1$ et le filtre $Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i (Z_{t-i} - Z_{t-i-1}) = F_\alpha(BZ)$ est bien défini, stationnaire, et vérifie $X_t - Y_t \to 0$ dans L^2 quand $t \to \infty$:

$$\left\| \sum_{i>t} \lambda^i (Z_{t-i} - Z_{t-i-1}) \right\|_2 \leq \sum_{i>t} |\lambda|^i \|Z_{t-i} - Z_{t-i-1}\|_2 = \sqrt{2}\sigma\lambda^{t+1}\frac{1-\lambda^\infty}{1-\lambda} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Solution succincte de l'exercice 2.3 (Processus AR)**.**

1. Établissons tout d'abord l'unicité. Si X et X' sont deux solutions stationnaires, alors $(X-X')_t = \phi(X-X')_{t-1} = \phi^n(X-X')_{t-n}$ pour tout $n \geq 1$, d'où
$$\mathrm{Var}((X-X)_t) \leq 2|\phi|^{2n}(\mathrm{Var}(X_t)+\mathrm{Var}(X'_t)) = 2|\phi|^{2n}(\gamma_X(0)+\gamma_{X'}(0)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
car $|\phi|<1$, d'où $X_t = X'_t$ p.s. d'où $X = X'$ p.s. Pour construire la solution,
$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t = \phi(\phi X_{t-2} + Z_{t-1}) = \cdots = \phi^{n+1}X_{t-n} + \sum_{k=1}^{n} \phi^k Z_{t-k},$$
et la somme du membre de droite converge p.s. et dans L^2 quand $n \to \infty$ vers le filtre $F_\phi Z$ où $\phi_k = \phi^k \mathbf{1}_{k\geq 0}$ car $\phi \in \ell^1$ car $|\phi| < \infty$. On vérifie alors directement que
$$(F_\phi Z)_t = \sum_{n=0}^{\infty} \phi^n Z_{t-n}$$
est solution. Il s'agit d'une solution stationnaire causale. Notons que $\phi^{n+1}X_{t-n}$ converge vers 0 p.s. et dans L^2 lorsque X est stationnaire ($\Rightarrow$ unicité à nouveau) ;
2. L'équation sans second membre $X_t = \phi X_{t-1}$ (c'est-à-dire pour $\sigma = 0$) a pour unique solution stationnaire le processus identiquement nul 0. Si Y est une solution non stationnaire de cette équation, alors $Y + F_\phi Z$ est solution non stationnaire de l'équation avec second membre $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$. Pour construire Y, on se donne une v.a.r. Y_0 non identiquement nulle et on en déduit que $Y_t = \phi^t Y_0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Comme $\mathbb{E}(Y_t) = \phi^t \mathbb{E}(Y_0)$ et $\mathrm{Var}(Y_t) = |\phi|^{2t}\mathrm{Var}(Y_0)$, et Y_0 n'est pas identiquement nulle, le processus Y n'est pas stationnaire. Ainsi, nous avons construit une infinité non dénombrable de solutions non stationnaires de l'équation $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$;
3. L'équation $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$ s'écrit $X_{t-1} = \phi^{-1}X_t - \phi^{-1}Z_{-t}$. Quitte à renverser le temps et à remplacer ϕ et Z_t par ϕ^{-1} et $\phi^{-1}Z_{-t}$, on déduit du cas $|\phi| < 1$ que le cas $|\phi| > 1$ admet une unique solution stationnaire donnée par le filtre
$$X_t = \sum_{n=0}^{\infty} \phi^{-n}(-\phi^{-1})Z_{-(-t-n)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \phi^{-(n+1)} Z_{t+n}.$$
Elle n'est pas causale ;
4. Si X est solution stationnaire de l'équation avec $|\phi| = 1$ alors, en itérant l'équation,
$$\mathrm{Var}(X_t - \phi^{n+1}X_{t-n}) = \mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} \phi^k Z_{t-k}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} |\phi|^{2k}\sigma^2 = n\sigma^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$
(marche aléatoire !), ce qui contredit une conséquence de la stationnarité de X :
$$\mathrm{Var}(X_t - \phi^{n+1}X_{t-n}) \leq 2\gamma_X(0) + 2|\phi|^{2(n+1)}\gamma_X(0) = \mathcal{O}(1).$$

Solution succincte de l'exercice 2.4. Pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on a
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|\alpha_k Z_{t-k}\|_{L^2} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k| \|Z_{t-k}\|_{L^2} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k| = \|\alpha\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}$$
qui n'est pas forcément fini car $\ell^1(\mathbb{Z}) \not\subseteq \ell^2(\mathbb{Z})$. La série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k Z_{t-k}$ est absolument convergente dans L^2 si et seulement si $\alpha \in \ell^1(\mathbb{Z})$.

Pour toute partie $K \subset \mathbb{Z}$ finie et tout $t \in \mathbb{Z}$, le théorème de Pythagore dans L^2 donne

$$\|\sum_{k\in K} \alpha_k Z_{t-k}\|_{L^2}^2 = \sum_{k\in K} |\alpha_k|^2 \|Z_{t-k}\|_2^2 = \sum_{k\in K} |\alpha_k|^2,$$

quantité qui tend vers 0 quand $K \subset [-a,a]^c$ avec $a \to \infty$ car $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\alpha_k|^2 = \|\alpha\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2 < \infty$. La série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k Z_{t-k}$ converge donc dans L^2 en vertu du critère de Cauchy.

Si de plus Z est gaussien, alors $\sum_{k\in K} \alpha_k Z_{t-k} \sim \mathcal{N}(0, (\sum_{k\in K} |\alpha_k|^2)$ et en utilisant les fonctions caractéristiques et en passant à la limite sur K, il vient que $X_t \sim \mathcal{N}(0, \|\alpha\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2)$.

Solution succincte de l'exercice 2.5 (Filtre à queues lourdes)**.**

1. La fonction caractéristique de $X_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$ vaut $\Phi_{X_1}(t) := \mathbb{E}(\mathrm{e}^{itX_1}) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, d'où, pour tout $n \geq 1$, $\beta > 0$, $t \in \mathbb{R}$ et $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$,

$$\Phi_{\beta(X_1+\cdots+X_n)}(t) = (\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\beta t X_1}))^n = (\Phi_{X_1}(\beta t))^n = \mathrm{e}^{-\frac{n\beta^2}{2}t^2},$$

   égal à $\Phi_{X_1}(t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}$ lorsque $\beta = n^{-1/2}$ c'est-à-dire que la loi gaussienne standard est 2-stable. Ceci reste valable pour la loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ par simple dilatation.

   Si X_1 suit la loi de Cauchy (ou de Lorentz) de paramètre $c > 0$, de densité $x \in \mathbb{R} \mapsto 1/(\pi c(1 + x^2/c^2))$, alors sa fonction caractéristique est donnée pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $\Phi_{X_1}(t) = \mathrm{e}^{-c|t|}$, et le raisonnement précédent indique de cette loi est 1-stable.

2. Fonctions caractéristiques à nouveau !

3. Pour toute partie finie $K \subset \mathbb{Z}$ et tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\Phi_{\sum_{k\in K} \eta_k Z_{t-k}}(t) = \prod_{k\in K} \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\eta_k t Z_{t-k}}) = \prod_{k\in K} \Phi_{Z_{t-k}}(\eta_k t) = \mathrm{e}^{-|t|^\alpha c \sum_{k\in K} |\eta_k|^\alpha},$$

   qui converge vers $\mathrm{e}^{-|t|^\alpha c \|\eta\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})}^\alpha}$ quand K tend vers $\mathbb{Z}$, ce qui garantit la convergence en loi de $\sum_{k\in K} \eta_k Z_{t-k}$ quand K tend vers $\mathbb{Z}$.

   Si $\alpha = 2$ alors $\eta \in \ell^2(\mathbb{Z})$ et $(F_\eta Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus stationnaire gaussien, filtre du bruit blanc gaussien Z. Le processus $(F_\eta Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est bien défini dans L^2. Il est possible de le définir dans L^1 (et presque sûrement) lorsque $\eta \in \ell^1(\mathbb{Z}) \subsetneq \ell^2(\mathbb{Z})$.

   Si $\alpha = 1$ alors $\eta \in \ell^1(\mathbb{Z})$, et $\mu_{\alpha,c}$ est une loi de Cauchy, qui n'a pas de moyenne ni de variance, et dans ce cas $F_\eta Z_t$ n'a ni moyenne ni variance. Par conséquent, quelque soit la manière de définir le processus $(F_\eta Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$, il ne serait pas du second ordre et donc pas stationnaire, ce qui ne l'empêcherait pas d'être éventuellement fortement stationnaire au sens de l'égalité des lois marginales de dimension finies !

Solution succincte de l'exercice 2.6 (Filtre de Kalman-Bucy)**.**

1. Posons $Y = (Z_0, \ldots, Z_{n-1})$. On a par hypothèse

$$f_{X|Y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\gamma^2}} \quad \text{et} \quad f_{Z|X,Y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\delta^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2\delta^2}}.$$

   Note : si μ ne dépend par de Y alors X et Y sont indépendants et donc $f_{X|Y} = f_X$, mais de toute manière, par la suite μ dépendra de Y. À présent, on écrit

$$f_{X|Z,Y} = \frac{f_{X,Z,Y}}{f_{X,Y}} \frac{f_{X,Y}}{f_{Z,Y}} = f_{Z|X,Y} \frac{f_{X,Y}}{f_{Z,Y}} = f_{Z|X,Y} \frac{f_{X|Y} f_Y}{f_{Z,Y}}$$

Or
$$f_{Z,Y} = \int f_{X,Z,Y}\,dx = \int f_{Z|X,Y} f_{X,Y}\,dx = f_Y \int f_{Z|X,Y} f_{X|Y}\,dx$$
et
$$\int f_{Z|X,Y} f_{X|Y}\,dx = \frac{1}{2\pi\delta\gamma} \int \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\gamma^2}-\frac{(y-x)^2}{2\delta^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\delta^2+\gamma^2)}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu)^2}{2(\delta^2+\gamma^2)}}.$$
Le résultat voulu s'obtient en regroupant ces petits calculs.

2. a) Si $(X, Z, Z_0) = (X_1, Y_1, 0)$ alors
$$\mathrm{Loi}(X \mid Z_0) = \mathcal{N}(a, \sigma^2) \quad \text{et} \quad \mathrm{Loi}(Z \mid X) = \mathcal{N}(X, \alpha^2),$$
d'où
$$\mathrm{Loi}(Y_1 \mid X_1) = \mathrm{Loi}(X \mid Z) = \mathrm{Loi}(X \mid Z, Z_0) = \mathcal{N}(\rho^2(a/\sigma^2 + Z/\alpha^2), \rho^2)$$
avec $1/\rho^2 = 1/\sigma^2 + 1/\alpha^2$. Donc $\hat{X}_1 = \mathbb{E}(X_1 \mid Y_1) = \rho^2(a/\sigma^2 + Y_1/\alpha^2)$ et
$$\rho_1 = \mathbb{E}(\mathbb{E}((X_1 - \hat{X}_1)^2 \mid Y_1)) = \rho^2.$$
b) Par construction des suites (X_n) et (Y_n) le vecteur $(X_{n-1}, Y_{n-1}, \ldots, Y_1)$ est un vecteur gaussien donc $\mathrm{Loi}(X_{n-1} \mid Y_1, \ldots, Y_{n-1})$ est gaussienne. Sa moyenne et sa variance sont la moyenne et la variance conditionnelles de X_{n-1} sachant $\mathcal{F}_{n-1}$.

c) De $X_n = a + X_{n-1} + \varepsilon_n$ et du fait que ε_n est indépendant de $\mathcal{F}_{n-1}$ on tire
$$\mathrm{Loi}(X_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \mathcal{N}(a, \sigma^2) * \mathrm{Loi}(X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}) = \mathcal{N}(a + \hat{X}_{n-1}, \sigma^2 + \rho_{n-1}^2)$$
En posant $(X, Z, Z_0, \ldots, Z_{n-1}) = (X_n, Y_n, Y_1, \ldots, Y_{n-1})$ il vient
$$\mathrm{Loi}(X_n \mid \mathcal{F}_n) = \mathcal{N}\left(\rho^2\left(\frac{\mu}{\gamma^2} + \frac{Y_n}{\alpha^2}\right), \rho^2\right)$$
avec $\mu = a + \hat{X}_{n-1}$, $\gamma = \sigma^2 + \rho_{n-1}^2$, et $1/\rho^2 = 1/\gamma^2 + 1/\alpha^2$.

3. Découle des formules trouvées pour $\mathrm{Loi}(X_n \mid \mathcal{F}_n)$ et $\mathrm{Loi}(X_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1})$.

Solution succincte de l'exercice 2.7 (Filtre de Kalman-Bucy multivarié)**.**

1. Comme D est inversible, on peut considérer la matrice triangulaire inférieure par blocs (qui est inversible car ses blocs diagonaux le sont)
$$L := \begin{pmatrix} I & 0 \\ -D^{-1}C & D^{-1} \end{pmatrix},$$
et utiliser le produit matriciel par bloc pour obtenir
$$ML = \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C & BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$
Il en découle que M est inversible si et seulement si S est inversible, or dans ce cas
$$\begin{pmatrix} S & BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} S^{-1} & -S^{-1}BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

ce qui permet d'obtenir la formule d'inversion par bloc

$$M^{-1} = L \begin{pmatrix} S & BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} S^{-1} & -S^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}CS^{-1} & D^{-1} + D^{-1}CS^{-1}BD^{-1} \end{pmatrix}$$

ou encore plus simplement

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -D^{-1}C & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Supposons à présent que M est symétrique. Alors $C = B^\top$ et les matrices D et S sont symétriques. Si de plus M est définie positive alors d'une part D est définie positive en tant que bloc de M, et d'autre part M est inversible et la formule de l'inversion par blocs de M montre que S^{-1} est définie positive en tant que bloc de M^{-1}, et donc S est définie positive. Réciproquement, si D et S sont définies positives, alors en la seconde formule d'inversion par blocs $M^{-1} = T^\top \mathrm{diag}(S^{-1}, D^{-1})T$ où T est triangulaire par bloc et inversible indique que M^{-1} est semblable à une matrice définie positive, et elle est donc définie positive, et c'est donc aussi le cas de M.

2. Soit $\tilde{X} := X - \hat{X}$. Le vecteur aléatoire $(\tilde{X}, Y - \bar{Y})$ est gaussien et

$$\mathrm{Cov}(\tilde{X}, Y) = \mathbb{E}(((X - \bar{X}) + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(Y - \bar{Y}))(Y - \bar{Y})^\top) = \Sigma_{12} + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{22} = 0,$$

par conséquent $\tilde{X}$ et Y sont indépendants. Ainsi on dispose de la décomposition $X = \hat{X} + \tilde{X}$ avec $\tilde{X}$ indépendant de Y et $\hat{X}$ fonction affine de Y. Il en découle que $\mathrm{Loi}(X \mid Y) = \mathcal{N}(\hat{X}, \mathrm{Cov}(\tilde{X}))$. Enfin on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(\tilde{X}) &= \mathrm{Cov}(X - \hat{X}) \\ &= \mathrm{Cov}(X - \bar{X} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(Y - \bar{Y})) \\ &= \Sigma_{11} - 2\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} \\ &= \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}. \end{aligned}$$

Au passage on obtient une réponse alternative et probabiliste à la question 1.

3. La question 2 donne $\mathrm{Loi}(X \mid Y) = \mathcal{N}(\hat{X}, \hat{\Sigma})$. Intéressons nous à présent à la loi conditionnelle $\mathrm{Loi}(X \mid Y, Z)$, qui est gaussienne. Nous pouvons supposer sans perdre de généralité que Z est centré. Comme Y et Z sont indépendants et que l'un d'entre eux au moins est centré, ils sont orthogonaux dans L^2 et donc la projection orthogonale $\hat{\hat{X}} := \mathbb{E}(X \mid Y, Z)$ de X sur le sous-espace $L^2(\sigma(Y, Z))$ de L^2 est la somme des projections orthogonales $\mathbb{E}(X \mid Y) = \hat{X}$ (de X sur $L^2(\sigma(Y))$) et $\mathbb{E}(X - \hat{X} \mid Z)$ (de X sur $L^2(\sigma(Z))$). Reste à calculer la matrice de covariance. Comme

$$X - \hat{X} = X - \hat{\hat{X}} + \mathbb{E}(X - \bar{X} \mid Z)$$

avec $X - \hat{\hat{X}}$ et $\mathbb{E}(X - \bar{X} \mid Z)$ orthogonaux dans $L^2(\sigma(Z))$, il vient

$$\mathrm{Cov}(X - \hat{X}) = \mathrm{Cov}(X - \hat{\hat{X}}) + \mathrm{Cov}(\mathbb{E}(X - \tilde{X} \mid Z))$$

ce qui conduit au résultat désiré en utilisant la question 2.

4. Comme le vecteur aléatoire $(X_n, Y_1, \dots, Y_n)$ est gaussien, il découle de la question 2 que $\mathrm{Loi}(X_n \mid Y_1, \dots, Y_n) = \mathcal{N}(\hat{X}_n, \Lambda_n)$ avec $\hat{X}_n$ fonction affine de $Y_1, \dots, Y_n$ et $\Lambda_n = \mathrm{Cov}(X_n - \hat{X}_n)$. Il reste à calculer $(\hat{X}_{n+1}, \Lambda_{n+1})$ en fonction de $(\hat{X}_n, \Lambda_n)$.

Comme $X_{n+1} = AX_n + \varepsilon_{n+1}$ avec ε_{n+1} centré et indépendant de $(X_n, Y_1, \dots, Y_n)$ et donc aussi de $\hat{X}_n$, il vient, d'après la question 2,

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \mid Y_1, \dots, Y_n) = \mathbb{E}(AX_n \mid Y_1, \dots, Y_n) = A\hat{X}_n$$

et

$$\mathrm{Cov}(X_{n+1} - A\hat{X}_n) = A\Lambda_n A^\top + Q.$$

Il reste à introduire Y_{n+1} dans le conditionnement. Pour cela, on considère le vecteur aléatoire gaussien $(Y_1, \dots, Y_n, Y'_{n+1})$ où $Y'_{n+1} := Y_{n+1} - \mathbb{E}(Y_{n+1} \mid Y_1, \dots, Y_n))$, qui engendre la même tribu que $(Y_1, \dots, Y_{n+1})$ et dont la dernière coordonnée Y'_{n+1} est indépendantes des n premières (on parle d'innovation). Notons que

$$Y'_{n+1} = Y_{n+1} - HA\hat{X}_n = HA\tilde{X}_n + H\varepsilon_{n+1} + \eta_{n+1}$$

où $\tilde{X}_n = X_n - \hat{X}_n$. À présent, en utilisant la question 3 on obtient

$$\begin{aligned}
\hat{X}_{n+1} &= A\hat{X}_n + \mathbb{E}(X_{n+1} - \mathbb{E}(X_{n+1}) \mid Y'_{n+1}) \\
\Lambda_{n+1} &= A\Lambda_n A^\top + Q - \mathrm{Cov}(\hat{X}_{n+1} - A\hat{X}_n).
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{n+1} Y'^\top_{n+1}) &= A\mathbb{E}(X_n (X_n - \hat{X}_n)^\top) A^\top H^\top + QH^\top \\
&= A\Lambda_n A^\top H^\top + QH^\top \\
\mathbb{E}(Y'_{n+1} Y'^\top_{n+1}) &= HA\Lambda_n A^\top H^\top + HQH^\top + R,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\hat{X}_{n+1} = A\hat{X}_n& \\
&+ (A\Lambda_n A^\top + Q)H^\top (H(A\Lambda_n A^\top + Q)H^\top + R)^{-1}(Y_{n+1} - HA\hat{X}_n) \\
\Lambda_{n+1} = A\Lambda_n A^\top& + Q \\
&- (A\Lambda_n A^\top + Q)H^\top (H(A\Lambda_n A^\top + Q)H^\top + R)^{-1} H(A\Lambda_n A^\top + Q).
\end{aligned}$$

5. Oui, l'approche reste valable lorsque les bruits sont indépendants et de variance variable (on dit que le bruit est hétérosédastique) et c'est une propriété remarquable du filtre de Kalman-Bucy. De plus, certains aspects, notamment markoviens, subsistent bien au delà du cas gaussien homogène, cf. par exemple le livre de Pardoux.

Feuille d'exercice 3

Équations et processus ARMA

Solution succincte de l'exercice 3.1 (ARMAda ou ARMArtial)**.**

1. L'équation $1 + 0.2z - 0.48z^2 = 0$ a pour solutions $-5/4$ et $5/3$, qui ne sont pas de module 1 donc il existe un processus stationnaire solution ;
2. L'équation $1 + 1.9z + 0.88z^2 = 0$ a pour solutions $-10/11$ et $-5/4$, qui ne sont pas de module 1 donc il existe un processus stationnaire solution ;
3. L'équation $1+0.6z = 0$ a pour solution $-5/3$ qui n'est pas de module 1 dont il existe une solution stationnaire ;
4. L'équation $1+1.8z+0.81z^2 = 0$ a pour solution $-10/9$ (racine double) qui n'est pas de module 1 donc il existe une solution stationnaire.

Solution succincte de l'exercice 3.2 (ARMA$(1, 1)$)**.**

1. Une solution stationnaire existe (elle est alors unique, et c'est un processus linéaire) lorsque le polynôme $\Phi(z) = P_{\alpha_\phi}(z) = 1-\phi z$ n'a pas de racine de module 1, c'est-à-dire lorsque $|\phi| \neq 1$ puisque Φ a une unique racine $z_1 = 1/\phi$;
2. La solution stationnaire est causale lorsque Φ n'a pas de racine de module ≤ 1, c'est-à-dire lorsque $|z_1| > 1$, c'est-à-dire $|\phi| < 1$. La solution stationnaire est inversible lorsque $\theta(z) = 1 + \theta z$ n'a pas de racine de module ≤ 1, c'est-à-dire lorsque l'unique racine $-1/\theta$ de θ est de module > 1, c'est-à-dire lorsque $|\theta| < 1$;
3. D'après un théorème du cours, la solution X s'obtient en développant en série de puissances de z la fraction rationnelle de l'équation ARMA

$$z \mapsto \frac{1 + \theta z}{1 - \phi z}$$

dans un voisinage du cercle unité $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. On distingue les cas $|\phi| < 1$ et $|\phi| > 1$.

Cas $|\phi| < 1$. Si $|z| = 1$ alors $|\phi z| < 1$ et

$$\frac{1}{1 - \phi z} = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k z^k$$

et donc

$$\frac{1 + \theta z}{1 - \phi z} = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k z^k + \theta z \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k z^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \phi^{k-1}(\phi + \theta) z^k$$

d'où

$$\psi_k = \mathbf{1}_{h=0} + \phi^{k-1}(\phi+\theta)\mathbf{1}_{h>0}.$$

Cas $|\phi| > 1$. Si $|z| = 1$ alors $|(\phi z)^{-1}| < 1$ et

$$\frac{1}{1-\phi z} = -\frac{1}{\phi z}\frac{1}{1-(\phi z)^{-1}} = -\frac{1}{\phi z}\sum_{k=0}^{\infty}\phi^{-k}z^{-k} = -\sum_{k=1}^{\infty}\phi^{-k}z^{-k}.$$

et donc

$$\frac{1+\theta z}{1-\phi z} = -\sum_{k=1}^{\infty}\phi^{-k}z^{-k} - \theta z\sum_{k=1}^{\infty}\phi^{-k}z^{-k} = -\theta\phi^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty}\phi^{-k-1}(\phi+\theta)z^{-k}$$

d'où

$$\psi_k = -\theta\phi^{-1}\mathbf{1}_{k=0} + \phi^{-k-1}(\phi+\theta)\mathbf{1}_{k<0}.$$

Dans les deux cas, $F_\phi^{-1} \circ F_\theta = F_\psi$, pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$X_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\psi_k Z_{t-k}$$

où la convergence a lieu p.s. et dans L^2. On retrouve bien $X = Z$ si $\theta = -\phi$.

4. Pour tout $h \in \mathbb{Z}$, comme $\gamma_Z(h) = \sigma^2\mathbf{1}_{h=0}$,

$$\gamma_X(h) = \gamma_{F_\psi Z}(h) = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}}\psi_j\psi_k\gamma_Z(h+j-k) = \sigma^2\sum_{j\in\mathbb{Z}}\psi_j\psi_{h+j}$$

Cette formule permet d'établir que $\gamma_X(h)$ décroît géométriquement (exponentielle) quand $|h| \to \infty$, en utilisant le fait que ψ_k décroît géométriquement quand $|k| \to \infty$, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ et $0 < \rho < 1$ tels que $|\gamma_X(h)| \leq C\rho^{|h|}$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$.

Solution succincte de l'exercice 3.3.

1. On a $\Phi(z) = 1 - 3z$ et $\Theta(z) = 1 - (10/3)z + z^2$. Le polynôme Φ a une seule racine, égale à $1/3$. Il ne s'annule donc pas sur le cercle unité, et donc, d'après le cours, l'équation ARMA$(1,2)$ admet une unique solution stationnaire, qui est un processus linéaire filtre de Z.
2. Le polynôme Φ s'annule sur le disque unité. Comme l'absence d'annulation sur le disque unité du polynôme Φ est une condition suffisante mais pas forcément nécessaire de causalité, on ne peut pas en déduire que la solution n'est pas causale.

   Le cours affirme que la solution s'obtient en développant en série de puissances de z autour du cercle unité la fraction rationnelle de l'équation. Or on remarque que $1/3$ est également racine de Θ, et pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$,

$$\frac{\Theta(z)}{\Phi(z)} = \frac{(1-3z)(1-\frac{1}{3}z)}{1-3z} = 1 - \frac{1}{3}z.$$

   Le dénominateur de cette fraction rationnelle irréductible ne s'annule pas sur le disque unité, et donc la solution est causale ! Ainsi il faut toujours simplifier les racines communes à Φ et Θ car la solution ne dépend que de la fraction rationnelle irréductible.
3. La fraction rationnelle irréductible indique que la solution est donnée pour tout $t \in \mathbb{Z}$ par $X_t = Z_t - (1/3)Z_{t-1}$. Ce processus est manifestement un filtre causal de Z.

4. Le polynôme Θ s'annule sur le disque unité. Comme l'absence d'annulation sur le disque unité du polynôme Θ est une condition suffisante mais pas forcément nécessaire d'inversibilité, on ne peut pas en déduire que la solution n'est pas inversible. En revanche, le numérateur de la fraction rationnelle irréductible est formé par le polynôme constant 1, qui ne s'annule pas, et donc le processus X est inversible ! L'expression de Z comme filtre causal de X s'obtient en développant l'inverse de la fraction rationnelle irréductible en séries de puissances de z autour du cercle unité. Comme pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$ on a $|(1/3)z| < 1$, il vient le développement en série de puissances $\Phi(z)/\Theta(z) = 1/(1-(1/3)z) = \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} z^k$, qui donne enfin la formule renversée $Z_t = (((\Phi/\Theta)(B))X)_t = \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} X_{t-k}$, qui est bien un filtre causal de X.

Solution succincte de l'exercice 3.4.

1. On a $\Theta(z) = 1$ (comme pour toute équation AR). D'autre part $\Phi(z) = 1 - z^p$, dont les racines $\{e^{i2\pi k/p} : 0 \leq k \leq p-1\}$, appelées racines p-ième de l'unité, sont de module 1. Comme l'absence d'annulation de Φ sur le cercle unité est une condition suffisante mais pas forcément nécessaire pour l'existence (et unicité) d'une solution stationnaire, on ne peut pas en déduire que l'équation n'admet pas de solution stationnaire.
2. Tentons d'établir qu'il n'existe pas de solution stationnaire en raisonnant par l'absurde. Si X est une solution stationnaire, alors pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et tout $r \geq 1$,

$$X_t = X_{t-p} + Z_t = X_{t-2p} + Z_t + Z_{t-p} = \cdots = X_{t-rp} + \sum_{k=0}^{r-1} Z_{t-kp}.$$

Or d'une part, en utilisant le théorème de Pythagore dans L^2, il vient

$$\|X_t - X_{t-2p}\|_2^2 = \left\|Z_t + Z_{t-p} + \cdots + Z_{t-(r-1)p}\right\|_2^2 = r\sigma^2 \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

tandis que d'autre part, en utilisant la stationnarité de X,

$$\|X_t - X_{t-2p}\|_2^2 = \gamma_X(0) - 2\gamma_X(2p) + \gamma_X(0) \leq 4\gamma_X(0) = \mathcal{O}_{r\to\infty}(1),$$

ce qui est bien contradictoire. Il n'y a donc pas de solution stationnaire.

Solution succincte de l'exercice 3.5 (Produit d'ARMA)**.**

1. Il s'agit de la causalité. D'après le cours, cela a lieu lorsque les polynômes $\Phi_1(z) = 1 - \varphi_1 z$ et $\Phi_2(z) = 1 - \varphi_2 z$ ne s'annulent par sur le disque unité fermé. La condition est donc $\min(|\varphi_1|, |\varphi_2|) > 1$ car les racines sont $-1/\varphi_1$ et $-1/\varphi_2$. Cette condition inclut la condition d'existence de la solution stationnaire : $\Phi_1(z) = 1 - \phi_1 z$ et $\Phi_2(z) = 1 - \phi_2 z$ de ne pas s'annuler sur le cercle unité ;
2. Il s'agit de l'inversibilité : le bruit blanc ε (respectivement η) est un filtre linéaire causal du processus X (respectivement Y). D'après le cours, cela a lieu lorsque les polynômes $\Theta_1(z) = 1 + \theta_1 z$ et $\Theta_2(z) = 1 + \theta_2 z$ ne s'annulent par sur le disque unité fermé. La condition est donc $\min(|\Theta_1|, |\Theta_2|) > 1$ car les racines sont $-1/\theta_1$ et $-1/\theta_2$) ;
3. Comme X et Y sont inversibles on a $\varepsilon = F_\psi X$ et $\eta = F_{\widetilde{\psi}} Y$ où $\psi, \widetilde{\psi} \in \ell^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z})$ (et à support dans $\mathbb{N}$), et donc pour tous $s, t \in \mathbb{Z}$, par continuité du produit scalaire,

$$\mathrm{Cov}(\varepsilon_s, \eta_t) = \mathbb{E}(\varepsilon_s, \eta_t) = \sum_{h,k\in\mathbb{Z}} \psi_h \widetilde{\psi}_k \mathbb{E}(X_{s-h} Y_{t-k}) \sum_{h,k\in\mathbb{Z}} \psi_h \widetilde{\psi}_k \mathbb{E}(X_{s-h}) \mathbb{E}(Y_{t-k}) = 0.$$

4. Pour tous $t, h \in \mathbb{Z}$, par indépendance, $\mu_Z(t) = \mathbb{E}(Z_t) = \mathbb{E}(X_t)\mathbb{E}(Y_t) = 0$ et

$$\begin{aligned}\gamma_Z(t,t+h) &= \mathbb{E}(X_t Y_t X_{t+h} Y_{t+h}) \\ &= \mathbb{E}(X_t X_{t+h})\mathbb{E}(Y_t Y_{t+h}) \\ &= \gamma_X(h)\gamma_Y(h) \\ &= \sigma_1^2\Big(\sum_{j\geq 0}\psi_j\psi_{j+h}\Big)\sigma_2^2\Big(\sum_{j\geq 0}\widetilde{\psi}_j\widetilde{\psi}_{j+h}\Big),\end{aligned}$$

qui ne dépendent pas de t (le processus Z est stationnaire).

Solution succincte de l'exercice 3.6 (ARMA(2,1))**.**

1. On a $P_\varphi(z) = 1 - z + z^2/4 = (1-z/2)^2$ qui ne s'annule qu'en $z = 2$ (racine double). Comme cette racine est de module > 2, il en découle que l'équation ARMA ci-dessus admet une unique solution stationnaire, qui est causale ;
2. Les $(\psi_k)_{k\geq 0}$ s'obtiennent en développant en série de puissance de z autour du cercle unité la fraction rationnelle de l'ARMA : (ici $|z/2| < 1$ si $|z| = 1$)

$$\begin{aligned}\frac{P_\theta(z)}{P_\varphi(z)} &= \frac{1+z}{(1-z/2)^2} \\ &= (1+z)\sum_{k\geq 0}(k+1)2^{-k}z^k \\ &= 1 + \sum_{k\geq 1}\underbrace{\big((k+1)2^{-k} + k2^{-(k-1)}\big)}_{(3k+1)2^{-k}}z^k,\end{aligned}$$

d'où $\psi = \mathbf{1}_{k=0} + (3k+1)2^{-k}\mathbf{1}_{k>0}$. Note : $(1-u)^{-2} = \sum_{k\geq 0}(k+1)u^k$ si $|u| < 1$;
3. Pour tout $h \geq 0$,

$$\gamma_X(h) = \sigma^2\sum_{k\geq 0}\psi_k\psi_{k+h} = \sigma^2\psi_h + \sigma^2 2^{-h}\sum_{k\geq 1}(3k+1)(3(k+h)+1)2^{-2k} = \cdots.$$

Solution succincte de l'exercice 3.7 (Filtrage exponentiel et AR(∞))**.** On vérifie directement que ce processus MA(1) est solution de l'équation AR(∞) : pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$Z_t - \sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k X_{t-k} = Z_t - \sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k Z_{t-k} + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{k+1}Z_{t-1-k} = Z_t - \lambda Z_{t-1} = X_t.$$

Solution succincte de l'exercice 3.8.

1. Par analogie avec le cas scalaire ($d = 1$) on aimerait poser

$$X_t = \sum_{k\geq 0}\Phi^k Z_{t-k}.$$

C'est une série dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega \to \mathbb{R}^d)$ dont la norme $\|Y\|_{L^2} := \mathbb{E}(\|Y\|_2^2)^{1/2}$ dérive du produit scalaire $\mathbb{E}(X \cdot Y)$. Elle converge absolument car

$$\|\sum_{k\geq 0}\Phi^k Z_{t-k}\|_{L^2} \leq \sum_{k\geq 0}\|\Phi^k\|_{2\to 2}\|Z_{t-k}\|_{L^2} \leq \sum_{k\geq 0}\|\Phi\|_{2\to 2}^k\sqrt{d\sigma^2} = \frac{\sqrt{d}\sigma}{1-\|\Phi\|_{2\to 2}},$$

où on a utilisé l'inégalité triangulaire pour la norme de L^2, la sous-multiplicativité de la norme de matrice puis le fait que $\|Z_t\|_{L^2}^2 = \sum_{j=1}^d \mathbb{E}(Z_{t,j}^2) = d\sigma^2$. Le processus X est donc bien défini dans L^2. Il est bien solution de l'équation AR(1) vectorielle car par continuité de l'application linéaire $Y \in L^2 \mapsto \Phi Y \in L^2$, on a

$$\Phi X_{t-1} = \sum_{k\geq 0} \Phi^{k+1} Z_{t-1-k} = \sum_{k\geq 1} \Phi^k Z_{t-k} = X_t - Z_t.$$

Notons que X a une norme constante en ce sens que pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\|X_t\|_{L^2}^2 = \mathbb{E}\Big(\sum_{j,k\geq 0} \Phi^j Z_{t-j} \cdot \Phi^k \cdot Z_{t-k}\Big) &= \sum_{j,k\geq 0} \sum_{u,v,w=1}^d \Phi_{u,v}^j \Phi_{u,w}^k \mathbb{E}(Z_{t-j,v} Z_{t-k,w}) \\ &= \sigma^2 \sum_{k\geq 0} \sum_{u,v}^d (\Phi_{u,v}^k)^2 \\ &= \sigma^2 \sum_{k\geq 0} \mathrm{Tr}(\Phi^k (\Phi^k)^\top).\end{aligned}$$

Si X' est une solution de l'équation dans L^2, de norme constante, alors

$$X'_t = Z_t + \Phi X'_{t-1} = \cdots = \sum_{k=0}^n \Phi^k Z_{t-k} + \Phi^{n+1} X'_{t-(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \sum_{k\geq 0} \Phi^k Z_{t-k} = X_t$$

car $\|\Phi^{n+1} X'_{t-(n+1)}\|_{L^2} \leq \|\Phi\|_{2\to 2}^{n+1} \|X'_{t-(n+1)}\|_{L^2} = \|\Phi\|_{2\to 2}^{n+1} \|X'_0\|_{L^2} = o(1)$ et il y a donc unicité parmi les solutions dans L^2 de norme constante.

2. Si les processus $(Z_{t,1})_{t\in\mathbb{Z}}, \ldots, (Z_{t,d})_{t\in\mathbb{Z}}$ sont indépendants et si Φ est diagonale, alors les processus $(X_{t,1})_{t\in\mathbb{Z}}, \ldots, (X_{t,d})_{t\in\mathbb{Z}}$ sont des AR(1) indépendants de coefficients respectifs $\Phi_{1,1}, \ldots, \Phi_{d,d}$ car dans ce cas $\Phi^k Z_{t-k} = (\Phi_{1,1}^k Z_{t-k,1}, \ldots, \Phi_{d,d}^k Z_{t-k,d})^\top$.

Mesure et densité spectrales

Sauf mention explicite du contraire, les suites et les coefficients sont réels.

Solution succincte de l'exercice 4.1 (Processus AR(1))**.**

1. On a $\gamma_Z(h) = \sigma^2 \mathbf{1}_{h=0}$ d'où $f_Z(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}$ pour tout $\lambda \in [-\pi, \pi]$. La densité spectrale est constante et attribue le même poids $\sigma^2/(2\pi)$ à toute fréquence λ, d'où le nom de **bruit blanc** en identifiant une fréquence à une couleur par analogie avec la nature ondulatoire de la lumière (penser à la physique des rayonnements électromagnétiques) ;
2. On sait déjà par un exercice précédent (ou par le cours) que pour tout $h \in \mathbb{Z}$,

$$\gamma_{F_\alpha Y}(h) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_j \alpha_k \gamma_Y(h+k-j)$$

et cette formule fait sens car $\|\gamma_Y(h)\|_\infty \leq \gamma_Y(0) < \infty$ et $\|\alpha\|_1 < \infty$. D'autre part, par définition de ν_Y, on a, pour tout $h \in \mathbb{Z}$,

$$\gamma_Y(h) = \int_{[-\pi,\pi]} \mathrm{e}^{iu(h+k-j)} \mathrm{d}\nu_Y(u).$$

Par conséquent, en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned}\gamma_{F_\alpha Y}(h) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_j \alpha_k \int_{[-\pi,\pi]} \mathrm{e}^{iu(h+k-j)} \mathrm{d}\nu_Y(u) \\ &= \int_{[-\pi,\pi]} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_j \alpha_k \mathrm{e}^{iu(h+k-j)} \mathrm{d}\nu_Y(u) \\ &= \int_{[-\pi,\pi]} \mathrm{e}^{iuh} \left| \sum_{j\in\mathbb{Z}} \alpha_j \mathrm{e}^{-iuj} \right|^2 \mathrm{d}\nu_Y(u) \\ &= \int_{[-\pi,\pi]} \mathrm{e}^{iuh} \underbrace{\left|P_\alpha(\mathrm{e}^{-iu})\right|^2 \mathrm{d}\nu_Y(u)}_{\mathrm{d}\nu_{F_\alpha Y}(u)},\end{aligned}$$

Enfin si Y admet une densité spectrale f_Y alors

$$\mathrm{d}\nu_{F_\alpha Y}(u) = \left|P_\alpha(\mathrm{e}^{-iu})\right|^2 \mathrm{d}\nu_Y(u) = \underbrace{\left|P_\alpha(\mathrm{e}^{-iu})\right|^2 f_Y(u)}_{f_{F_\alpha Y}} \mathrm{d}u.$$

3. Si $|\phi| < 1$ alors $X = F_\alpha Z$ avec $\alpha_k = \phi^k \mathbf{1}_{k\geq 0}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et
$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\Big|\sum_{j=0}^{\infty}(\mathrm{e}^{-i\lambda}\phi)^j\Big|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{1}{|1-\mathrm{e}^{-i\lambda}\phi|^2}, \quad \lambda \in [-\pi,\pi].$$
Si $|\phi| > 1$ alors $X = F_\alpha Z$ avec $\alpha_k = -(\phi)^{-k+1}\mathbf{1}_{k\geq 1}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et donc
$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\Big| -\sum_{j\leq 0}\mathrm{e}^{-ij\lambda}\phi^{j-1}\Big|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi|\phi|^2}\left|\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-i\lambda}\phi^{-1}}\right|^2, \quad \lambda \in [-\pi,\pi];$$
4. L'équation AR(1) vérifiée par X donne
$$X_t = \phi^{-1}X_{t+1} - \phi^{-1}Z_{t+1}.$$
Notons que $(-\phi^{-1}Z'_{t+1})_{t\in\mathbb{Z}} \sim \mathrm{BB}(0,\sigma^2/\phi^2)$. Pour transformer cette équation autorégressive rétrograde en équation autorégressive progressive, on procède à un retournement temporel en posant $\widetilde{X}_t := X_{-t}$, ce qui donne
$$\widetilde{X}_{-t} = \phi^{-1}\widetilde{X}_{-t-1} - \phi^{-1}Z_{t+1},$$
soit, en posant $t' := -t$,
$$\widetilde{X}_{t'} = \phi^{-1}\widetilde{X}_{t'-1} - \phi^{-1}Z_{-t'+1}.$$
Il ne reste plus qu'à observer que $(Z'_{t'})_{t'\in\mathbb{Z}} := (-\phi^{-1}Z_{-t'+1})_{t'\in\mathbb{Z}} \sim \mathrm{BB}(0,\sigma^2/\phi^2)$. L'autocovariance d'un processus stationnaire est paire, et donc le retourné en temps du processus a la même autocovariance que le processus, et donc la même densité spectrale car la densité spectrale caractérise l'autocovariance.
Si X est de plus gaussien, alors sa loi est caractérisée par sa moyenne et son autocovariance, et donc X et son retourné en temps $\widetilde{X}$ ont même loi.
5. Si X est solution de l'équation MA(1) $X_t = Z_t - \theta Z_{t-1} = F_\theta Z$ où $\theta_k = \mathbf{1}_{k=0} - \theta\mathbf{1}_{k=1}$ alors $\theta \in \ell^1$ car θ est à support fini, et
$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\Big|\sum_{j\in\mathbb{Z}}\mathrm{e}^{-ij\lambda}\theta_j\Big|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left|1-\mathrm{e}^{-i\lambda}\theta\right|^2.$$

Solution succincte de l'exercice 4.2 (Herglotz)**.** Il s'agit d'une réplique d'une partie d'un exercice précédent sur l'autocovariance résolu par algèbre linéaire. Une fonction $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ est la fonction d'autocovariance d'un processus stationnaire ssi elle est symétrique (c'est-à-dire paire) et de type positif. Or le théorème de Herglotz indique à son tour que cela a lieu ssi la fonction constitue la suite des coefficients de Fourier d'une mesure positive finie sur $[-\pi,\pi]$ (appelée mesure spectrale). Dans le cas de ρ, la condition $|\alpha| \leq 1/2$ est suffisante car la formule
$$\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{ith}\frac{1+2\alpha\cos(t)}{2\pi}\,dt = \mathbf{1}_{h=0} + \frac{\alpha}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{ith}(\mathrm{e}^{it}+\mathrm{e}^{-it})\,dt = \mathbf{1}_{h=0} + \alpha\mathbf{1}_{|h|=1}$$
montre que ρ est alors la suite des coefficients de Fourier de la mesure positive finie sur $[-\pi,\pi]$ de densité $t \mapsto (1+2\alpha\cos(t))/(2\pi)$. En fait, il s'agit de la fonction d'autocovariance d'un processus MA(1) de paramètres θ et σ^2 tels que $(1+\theta^2)\frac{\sigma^2}{2\pi} = 1$ et $2\theta\frac{\sigma^2}{2\pi} = \alpha$.

Supposons réciproquement que $|\alpha| > 1/2$ et montrons que ρ ne peut pas être la suite des coefficients de Fourier d'une mesure positive finie ν sur $[-\pi, \pi]$. On raisonne par l'absurde : si c'était le cas, alors avec $a = -\text{signe}(\alpha) \in \{\pm 1\}$,

$$0 \leq \int_{[-\pi,\pi]} \underbrace{(1 + 2a\cos(t))}_{\geq 0} \nu(dt) = \hat{\nu}(0) + a(\hat{\nu}(-1) + \hat{\nu}(1)) = 1 + 2a\alpha = 1 - 2|\alpha| < 0.$$

Solution succincte de l'exercice 4.3 (Somme)**.**

1. $\mu_{X+Y}(t) = \mu_X + \mu_Y$ cte, $\gamma_{X+Y}(t, t+h) = \gamma_X(h) + \gamma_Y(h)$ ne dépend pas de t ;
2. $\nu_{X+Y} = \nu_X + \nu_Y$ et $f_{X+Y} = f_X + f_Y$ car ν et f dépendent linéairement de γ ;
3. $\mu_{XY}(t) = \mu_X \mu_Y$ et la quantité suivante ne dépend pas de t :

$$\begin{aligned}\gamma_{XY}(t, t+h) &= \mathbb{E}(X_t X_{t+h})\mathbb{E}(Y_t Y_{t+h}) - \mu_X \mu_Y \mu_X \mu_Y \\ &= (\gamma_X(h) + \mu_X^2)(\gamma_Y(h) + \mu_Y^2) - \mu_X^2 \mu_Y^2 \\ &= \gamma_X(h)\gamma_Y(h) + \mu_Y^2 \gamma_X(h) + \mu_X^2 \gamma_Y(h)\end{aligned}$$

4. Pour tout $t \in [-\pi, \pi]$, en utilisant les théorèmes de Fubini–Tonelli et de Herglotz,

$$\begin{aligned}(f_X \star f_Y)(t) &= \int_{-\pi}^{\pi} f_X(u) f_Y(t-u)\, du \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \sum_{h\in\mathbb{Z}} \gamma_X(h) \mathrm{e}^{-ihu} \frac{1}{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_Y(k) \mathrm{e}^{-ik(t-u)}\, du \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{h,k\in\mathbb{Z}} \gamma_X(h)\gamma_Y(k) \mathrm{e}^{-ikt} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-iu(h-k)}\, du}_{\mathbf{1}_{h=k}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{h\in\mathbb{Z}} \gamma_X(h)\gamma_Y(h) \mathrm{e}^{-iht} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{h\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-iht}(\gamma_{XY}(h) - \mu_Y^2 \gamma_X(h) - \mu_X^2 \gamma_Y(h)) \\ &= f_{XY}(t) - \mu_Y^2 f_X(t) - \mu_X^2 f_Y(t)\end{aligned}$$

d'où

$$f_{XY} = f_X \star f_Y + \mu_Y^2 f_X + \mu_X^2 f_Y.$$

Solution succincte de l'exercice 4.4 (Harmonique)**.**

1. L'indépendance donne $\gamma_X = \gamma_{X-Y} + \gamma_Y$, et par ailleurs, comme on sait que le processus harmonique $X - Y$ est stationnaire centré, on peut recalculer rapidement son autocovariance en utilisant les propriétés de A et B (posons $\theta = \pi/3$) :

$$\begin{aligned}\gamma_{X-Y}(h) &= \mathbb{E}((X-Y)_0 (X-Y)_h) \\ &= \mathbb{E}(A(A\mathfrak{Re}\,\mathrm{e}^{ih\theta} + B\mathfrak{Im}\,\mathrm{e}^{ih\theta})) \\ &= \sigma^2 \mathfrak{Re}\,\mathrm{e}^{ih\theta} \\ &= \sigma^2 \cos(\theta h).\end{aligned}$$

Donc $\nu_{X-Y} = \frac{\sigma^2}{2}(\delta_{-\theta} + \delta_\theta)$ car

$$\int_{[-\pi,\pi]} \mathrm{e}^{iht}\, \nu_{X-Y}(dt) = \frac{\sigma^2}{2}(\mathrm{e}^{-ih\theta} + \mathrm{e}^{ih\theta}) = \sigma^2 \mathfrak{Re}(\mathrm{e}^{ih\theta}) = \sigma^2 \cos(h\theta).$$

D'où $\nu_X = \nu_{X-Y} + \nu_Y = \frac{\sigma^2}{2}(\delta_{-\theta} + \delta_\theta) + \nu_Y$. Si Y est un BB$(0,\sigma_Y^2)$ alors $\nu_Y = \frac{\sigma_Y^2}{2\pi}dt$ et donc dans ce cas ν_X comporte à la fois une partie à densité et des masses de Dirac (par conséquent X n'a pas de densité spectrale, tout comme $X - Y$).

2. Si X est un MA(1) $X = F_\alpha Z$ où $\alpha = \mathbf{1}_{h=0} + \theta\mathbf{1}_{h=1}$ et donc f_X existe et vaut

$$f_X(t) = \left|P_\alpha(\mathrm{e}^{-it})\right|^2 f_Z(t) = \left|1 + \theta\mathrm{e}^{-it}\right|^2 \frac{\sigma^2}{2\pi} = (1 + 2\theta\cos(t) + \theta^2)\frac{\sigma^2}{2\pi}.$$

Solution succincte de l'exercice 4.5 (Bestiaire)**.**

1. $f(\pi) = 1 - \frac{\pi^2}{2} < 0$ ce qui n'est pas permis pour une densité spectrale ;
2. $f(-\pi) = 1 - \frac{\pi^2}{2} < 0$ ce qui n'est pas permis pour une densité spectrale ;
3. continue et positive donc définit une mesure positive finie sur $[-\pi,\pi]$, qui est donc la mesure spectrale d'un processus d'après le théorème de Herglotz, qui admet donc f comme densité spectrale.

Solution succincte de l'exercice 4.6 (Bande)**.** On a $\mathrm{spec}(\gamma_n) \subset [2\pi m, 2\pi M]$ car pour tout $n \geq 1$ et tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
\langle \gamma_n v, v\rangle &= \sum_{j,k=1}^n (\gamma_n)_{j,k} v_j v_k \\
&= \sum_{j,k=1}^n \gamma_Y(j-k) v_j v_k \\
&= \sum_{j,k=1}^n v_j v_k \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{i(j-k)t} f(t)\,dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{j,k=1}^n v_j v_k \mathrm{e}^{i(j-k)t}\right) f(t)\,dt \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left|\sum_{j=1}^n v_j \mathrm{e}^{ijt}\right|^2 f(t)\,dt \\
&\in [m,M] \int_{-\pi}^{\pi} \left|\sum_{j=1}^n v_j \mathrm{e}^{ijt}\right|^2 dt \\
&= [m,M] \sum_{j,k=1}^n v_j v_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{i(j-k)t}\,dt}_{(2\pi)\mathbf{1}_{j=k}} \\
&= [m,M](2\pi)\left\|v\right\|_2^2.
\end{aligned}$$

FEUILLE D'EXERCICE 5

Prédiction

Solution succincte de l'exercice 5.1 (Processus déterministes)**.**

1. Découle de $\mathrm{proj}(X_t, H_{t-1}) = \arg\min_{Y \in H_{t-1}} \|X_t - Y\|_2$;
2. La quantité $\mathbb{E}((X_t - \mathrm{proj}(X_t, H_{t-1}))^2) = \|X_t - \mathrm{proj}(X_t, H_{t-1})\|_2^2$ ne dépend pas de t par stationnarité, et son annulation est équivalente à $X_t = \mathrm{proj}(X_t, H_{t-1})$ dans L^2 ;
3. Pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $X_t = A\cos(\theta t) + B\sin(\theta t)$, où A et B sont des v.a.r. fixée, non corrélées, de moyenne 0, et de variance σ^2, et où θ est un paramètre réel fixé. À présent les formules trigonométriques $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$ et $2\cos(a)\sin(b) = \sin(a+b) + \sin(b-a)$ donnent, pour tout $t \in \mathbb{Z}$,
$$X_t = 2\cos(\theta)X_{t-1} - X_{t-2} \in H_{t-1}, \quad \text{d'où} \quad X_t = \mathrm{proj}(X_t, H_{t-1}).$$
Ainsi X est déterministe. Ceci n'est pas étonnant : les trajectoires du processus sont des sinusoïdes dont la seule source d'aléa est l'amplitude, ce qui fait qu'à chaque instant, il est possible de prédire le futur de la trajectoire à partir de son passé.
4. Un bruit blanc à variance non nulle n'est jamais déterministe. En effet, si $Z \sim \mathrm{BB}(0, \sigma^2)$ avec $\sigma^2 > 0$ alors $Z_t \perp H_{t-1} := \overline{\mathrm{vect}\{Z_{t-1}, Z_{t-2}, \ldots\}}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$ d'où $\mathrm{proj}(Z_t, H_{t-1}) = 0$ et $\|Z_t - \mathrm{proj}(Z_t, H_{t-1})\|_2^2 = \|Z_t\|_2^2 = \sigma^2 > 0$.

Solution succincte de l'exercice 5.2 (Lissage exponentiel)**.**

1. En posant $f(a) := \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k (X_{n-k} - a)^2$, il vient
$$f'(a) = 2\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k (X_{n-k} - a)$$
qui s'annule lorsque $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k X_{n-k} = a\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k = a\frac{1-\lambda}{1-\lambda^n}$.
2. Pour établir la formule de mise à jour récursive, on écrit
$$\begin{aligned}\hat{X}_{n+1} &= (1-\lambda)\sum_{k=0}^{n} \lambda^k X_{n+1-k} \\ &= (1-\lambda)\sum_{k=0}^{n} \lambda^k X_{n-(k-1)} \\ &= (1-\lambda)X_{n+1} + \lambda\hat{X}_n\end{aligned}$$

3. On a, en faisant le changement de variables $(k,s) = (k, k+k')$,

$$\begin{aligned}\hat{\hat{X}}_n &:= (1-\lambda)\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k \hat{X}_{n-k}\\ &= (1-\lambda)^2\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k\sum_{k'=0}^{n-k-1}\lambda^{k'}X_{n-k-k'}\\ &= (1-\lambda)^2\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{k'=0}^{n-k-1}\lambda^{k+k'}X_{n-(k+k')}\\ &= (1-\lambda)^2\sum_{s=0}^{n-1}(s+1)\lambda^s X_{n-s}.\end{aligned}$$

4. La fonction $f(a,b) := \sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k(X_{n-k}-(ak+b))^2$ vérifie

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\partial_1 f(a,b) &= \sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k(X_{n-k}-(ak+b))k \sim \sum_{k=0}^{n-1}k\lambda^k X_{n-k} - a\frac{\lambda(1+\lambda)}{(1-\lambda)^3} - b\frac{\lambda}{(1-\lambda)^2}\\ -\frac{1}{2}\partial_2 f(a,b) &= -\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k(X_{n-k}-(ak+b)) \sim \sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k X_{n-k} - a\frac{\lambda}{(1-\lambda)^2} - b\frac{1}{1-\lambda}\end{aligned}$$

car (dérivées à l'origine de la transformée de Laplace de la loi géométrique)

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k = \frac{1}{1-\lambda},\quad \sum_{k=0}^{\infty}k\lambda^k = \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2},\quad \sum_{k=0}^{\infty}k^2\lambda^k = \frac{\lambda(1+\lambda)}{(1-\lambda)^3}.$$

Supposons à présent que (a,b) est un point critique de f. On a alors

$$\frac{(1-\lambda)^2}{\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}k\lambda^k X_{n-k} \sim \frac{1+\lambda}{1-\lambda}a + b$$

et

$$(1-\lambda)\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k X_{n-k} \sim \frac{\lambda}{1-\lambda}a + b,$$

d'où

$$a \sim \frac{1-\lambda}{\lambda}(\hat{\hat{X}}_n - (1-\lambda)\hat{X}_n - \lambda\hat{X}_n) = \frac{1-\lambda}{\lambda}(\hat{\hat{X}}_n - \hat{X}_n)$$

et

$$b \sim \hat{X}_n - \frac{\lambda}{1-\lambda}a \sim 2\hat{X}_n - \hat{\hat{X}}_n.$$

Solution succincte de l'exercice 5.3 (Inversibilité de la matrice d'autocovariance)**.**

1. Comme γ_{r+1} est singulière, il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^{r+1}$ tel que $v \neq 0$ et $\langle \gamma_{r+1}v, v\rangle = 0$. On a nécessairement $v_{r+1} \neq 0$ car sinon γ_r serait singulière. Comme $\langle\gamma_{r+1}v,v\rangle = \sum_{j,k=1}^{r+1}\gamma(j-k)v_jv_k = \mathrm{Var}(\sum_{j=1}^{r+1}v_jX_j)$ on obtient $\sum_{j=1}^{r+1}v_jX_j = 0$ p.s. À présent, si $v_{r+1}\neq 0$, alors, en posant $b_j^{(r+1)} = v_j/v_{r+1}$, il vient, p.s.

$$X_{r+1} = \sum_{j=1}^{r+1}b_j^{(r+1)}X_j.$$

Ensuite, pour tout $n \geq r+1$, on procède de même pour exprimer X_n comme combinaison linéaire de $X_{n-1}, \ldots, X_{n-r}$, puis X_{n-1} comme combinaison linéaire de $X_{n-2}, \ldots, X_{n-r-1}$, etc, jusqu'à éliminer tous les X_j avec $j > r+1$.

2. De la question précédente on tire $\lambda_{\min}(\gamma_r) > 0$ et

$$\gamma(0) = \mathrm{Var}(X_{n+1}) = \left\langle \gamma_r b^{(n)}, b^{(n)} \right\rangle \geq \lambda_{\min}(\gamma_r) \left\| b^{(n)} \right\|_2 \geq \lambda_{\min}(\gamma_r) \left\| b^{(n)} \right\|_\infty$$

d'où

$$\sup_{n \geq r+1, 1 \leq j \leq r} |b_j^{(n)}| = \sup_{n \geq r+1} \left\| b^{(n)} \right\|_\infty \leq \frac{\gamma(0)}{\lambda_{\min}(\gamma_r)} < \infty.$$

3. On a en utilisant les deux questions précédentes

$$0 < \gamma(0) = \mathrm{Var}(X_{n+1}) = \sum_{j=1}^{r} \gamma(n+1-j) b_j^{(n)} \leq \sup_{1 \leq j \leq r, n \geq r+1} |b_j^{(n)}| \max_{n-r+1 \leq k \leq n} |\gamma(k)|$$

or le second membre tend vers 0 quand $n \to \infty$ si $\gamma(t) \to 0$ quand $t \to \infty$.

Solution succincte de l'exercice 5.4 (Prédiction de processus autorégressifs)**.**

1. $\hat{X}_2 = \varphi_{1,1} X_1$ où $\varphi_{1,1}$ est solution de $\gamma_1 \varphi_{1,1} = \gamma(1)$, et comme $\gamma_1 = \gamma(0)$, il vient $\varphi_{1,1} = \gamma(1)/\gamma(0) = \rho(1)$, d'où enfin $\hat{X}_2 = \rho(1) X_1$. Notons que $\rho(1) = \varphi_1$ car l'équation AR(1) donne $\gamma(1) = \mathbb{E}(X_1 X_0) = \mathbb{E}((\varphi_1 X_0 + Z_1) X_0) = \varphi_1 \gamma(0)$ par causalité car $X_0 \in \mathrm{vect}(Z_0, Z_{-1}, \ldots)$.
Montrons que $\hat{X}_3 = \varphi_1 X_2$. On a $X_3 - \varphi_1 X_2 \in \mathrm{vect}(X_1, X_2)$, et il suffit d'établir que $X_3 - \varphi_1 X_2 \perp X_1$ et $\varphi_1 X_2 \perp X_2$. Or en utilisant l'équation AR(1) et la causalité on obtient $\langle X_3 - \varphi_1 X_2, X_1 \rangle = \langle Z_3, X_1 \rangle = 0$ et $\langle X_3 - \varphi_1 X_2, X_2 \rangle = \langle Z_3, X_2 \rangle = 0$.
Plus généralement, pour tout $n \geq 1$, $\hat{X}_{n+1} = \varphi_1 X_n$, car $\varphi_1 X_n \in \mathrm{vect}(X_1, \ldots, X_n)$ et l'équation AR(1) et la causalité donnent pour tout $Y \in \mathrm{vect}(X_1, \ldots, X_n)$

$$\langle X_{n+1} - \varphi_1 X_n, Y \rangle = \langle Z_{n+1}, Y \rangle = 0.$$

2. On a $\hat{X}_{n+1} = \varphi_1 X_n + \varphi_2 X_{n-1}$ car $\varphi_1 X_n + \varphi_2 X_{n-1} \in \mathrm{vect}(X_1, \ldots, X_n)$ tandis que l'équation AR(2) et la causalité donnent pour tout $Y \in \mathrm{vect}(X_1, \ldots, X_n)$

$$\langle X_{n+1} - (\varphi_1 X_n + \varphi_2 X_{n-1}), Y \rangle = \langle Z_{n+1}, Y \rangle = 0.$$

3. Toujours la même idée poussée encore plus loin : On a $\hat{X}_{n+1} = \varphi_1 X_n + \cdots + \varphi_p X_{n-p+1}$ car $\varphi_1 X_n + \cdots + \varphi_p X_{n-p+1} \in \mathrm{vect}(X_1, \ldots, X_n)$ tandis que l'équation AR(p) et la causalité donnent pour tout $Y \in \mathrm{vect}(X_1, \ldots, X_n)$

$$\langle X_{n+1} - (\varphi_1 X_n + \cdots + \varphi_p X_{n-p+1}), Y \rangle = \langle Z_{n+1}, Y \rangle = 0.$$

Solution succincte de l'exercice 5.5 (Prédiction de processus ARMA)**.**

1. Par causalité et inversibilité on obtient

$$X_t = \sum_{j \geq 0} \psi_j Z_{t-j} \quad \text{et} \quad Z_t = \sum_{j \geq 0} \pi_j X_{t-j}$$

d'où

$$X_{n+h} = \sum_{j \geq 0} \psi_j Z_{n+h-j} \quad \text{et} \quad Z_{n+h} = X_{n+h} + \sum_{j \geq 1} \pi_j X_{n+h-j}.$$

En appliquant $\mathrm{proj}_{\mathcal{M}_n}$ on obtient

$$\tilde{X}_{n+h} = \sum_{j\geq 0} \psi_j \mathrm{proj}_{\mathcal{M}_n}(Z_{n+h-j})$$

or $\mathcal{M}_n = \mathrm{vect}(Z_j : -\infty < j \leq n)$ par causalité, et donc $\mathrm{proj}_{\mathcal{M}_n}(Z_{n+h-j}) = Z_{n+h-j}$ si $n+h-j \leq n$ c'est-à-dire si $j \geq h$, tandis que comme Z est un bruit blanc, on a $Z_{n+h-j} \perp \mathcal{M}_n$ c'est-à-dire $\mathrm{proj}_{\mathcal{M}_n}(Z_{n+h-j}) = 0$ si $n+h-j > n$ c'est-à-dire si $j < h$. On obtient bien la formule attendue $\tilde{X}_{n+h} = \sum_{j\geq h} \psi_j Z_{n+h-j}$.
En appliquant $\mathrm{proj}_{\mathcal{M}_n}$ cette fois-ci à la formule de Z_{n+h} ci-dessus il vient

$$\mathrm{proj}_{\mathcal{M}_n}(Z_{n+h}) = \tilde{X}_{n+h} + \sum_{j\geq 1} \pi_j \tilde{X}_{n+h-j}$$

or comme $h \geq 1$ on a $Z_{n+h} \perp \mathcal{M}_n$ d'où $\tilde{X}_{n+h} = -\sum_{j\geq 1} \pi_j \tilde{X}_{n+h-j}$.
On a enfin

$$X_{n+h} - \tilde{X}_{n+h} = \sum_{j\geq 0} \psi_j Z_{n+h-j} - \sum_{j\geq h} \psi_j Z_{n+h-j} = \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j Z_{n+h-j}$$

d'où

$$\mathbb{E}((X_{n+h} - \tilde{X}_{n+h})^2) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{h-1} \psi_j^2.$$

2. Notons tout d'abord qu'un AR(p) causal est toujours inversible car $\theta(z) = 1$, et un MA(1) inversible est toujours causal car $\Phi(z) = 1$.
Pour un AR(p), on a $\theta(z) = 1$ et $\Phi(z) = 1-(\varphi_1 z+\cdots+\varphi_p z^p)$ donc $\pi_0 = 1$, $\pi_j = -\varphi_j$ si $1 \leq j \leq p$ et $\pi_j = 0$ si $j > p$, d'où

$$\tilde{X}_{n+h} = +\sum_{j=1}^{p} \varphi_j \tilde{X}_{n+h-j}$$

et en particulier

$$\tilde{X}_{n+1} = +\sum_{j=1}^{p} \varphi_j \tilde{X}_{n+1-j}$$

et comme $n+1-j \leq n$ pour $j \geq 1$ il vient $\tilde{X}_{n+1-j} = X_{n+1-j}$, d'où

$$\tilde{X}_{n+1} = +\sum_{j=1}^{p} \varphi_j X_{n+1-j} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}((X_{n+1} - \tilde{X}_{n+1})^2) = \sigma^2 \psi_0^2 = \sigma^2.$$

Pour un MA(1) inversible on obtient comme précédemment que

$$\tilde{X}_{n+1} = -\sum_{j\geq 1} \pi_j X_{n+1-j}$$

or on a $\sum_{j\geq 0} \pi_j z^j = 1/(1+\theta_1 z) = \sum_{j\geq 0}(-\theta_1 z)^j$ d'où $\pi_j = (-\theta_1)^j$, ce qui donne

$$\tilde{X}_{n+1} = -\sum_{j\geq 1} (-\theta_1)^j X_{n+1-j} = -\sum_{j\geq 0} (-\theta_1)^{j+1} X_{n-j}$$

tandis que comme $\psi_j = \mathbf{1}_{j=0}$ il vient

$$\mathbb{E}((X_{n+1} - \tilde{X}_{n+1})^2) = \sigma^2.$$

Solution succincte de l'exercice 5.6 (Prédiction d'un MA(1) et algorithme des innovations)**.** L'autocovariance d'un MA(1) vérifie

$$\kappa(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{si } |i-j|>1 \\ \sigma^2(1+\theta^2) & \text{si } i=j \\ \theta\sigma^2 & \text{si } j=i\pm 1 \end{cases}$$

On a $v_0 = \kappa(1,1) = \sigma^2(1+\theta^2)$.

Étape $k=0$. On a $\theta_{n,n} = 0$ si $n \geq 2$ car

$$\theta_{n,n} = v_0^{-1}\Big(\kappa(n+1,1) - \sum_{\varnothing}\Big) = v_0^{-1}\kappa(n+1,1).$$

Étape $k=1$. On a $\theta_{n,n-1} = 0$ si $n \geq 3$ car

$$\theta_{n,n-1} = v_1^{-1}\Big(\kappa(n+1,2) - \sum_{j=0}^{1-1}\theta_{1,1-j}\theta_{n,n-j}v_j\Big) = v_1^{-1}\Big(\underbrace{\kappa(n+1,2)}_{=0 \text{ si } n\geq 3} - \underbrace{\theta_{1,1}\theta_{n,n}v_0}_{=0 \text{ si } n \geq 2}\Big).$$

Étape $k=2$. Pour $n \geq 4$ on trouve $\theta_{n,n-2} = 0$ si $n \geq 4$, car en utilisant le fait que $\kappa(n+1,3) = 0$ et $\theta_{n,n} = \theta_{n,n-1} = 0$ (obtenu précédemment),

$$\theta_{n,n-2} = v_2^{-1}\Big(\kappa(n+1,3) - \sum_{j=0}^{2-1}\theta_{2,2-j}\theta_{n,n-j}v_j\Big) = 0.$$

Plus généralement, pour tout $k \in \{0,1,\ldots,n\}$ on montre par récurrence que $\theta_{n,n-k} = 0$ si $n \geq k+2$ et $k \geq 0$ c'est-à-dire que

$$\theta_{n,j} = 0, \quad 2 \leq j \leq n.$$

Il en découle que pour $k = n-1$,

$$\theta_{n,1} = v_{n-1}^{-1}\Big(\kappa(n+1,n) - \underbrace{\sum_{j=0}^{n-2}\theta_{n-1,n-1-j}\theta_{n,n-j}v_j}_{=0}\Big) = v_{n-1}^{-1}\kappa(n+1,n),$$

et donc pour notre MA(1) on a

$$\theta_{n,1} = v_{n-1}^{-1}\theta\sigma^2.$$

Ceci permet d'obtenir une formule de récurrence pour v_n pour notre MA(1) car

$$\begin{aligned} v_n &= \kappa(n+1,n+1) - \sum_{j=0}^{n-1}\theta_{n,n-j}^2 v_j \\ &= \sigma^2(1+\theta^2) - \sum_{j=0}^{n-1}\theta_{n,n-j}^2 v_j \\ &= \sigma^2(1+\theta^2) - \theta_{n,1}^2 v_{n-1} \\ &= \sigma^2(1+\theta^2) - v_{n-1}^{-2}\theta^2\sigma^4 v_{n-1} \\ &= \sigma^2(1+\theta^2) - v_{n-1}^{-1}\theta^2\sigma^4. \end{aligned}$$

En conclusion, on a, pour notre MA(1),

$$\hat{X}_{n+1} = \theta_{n,1}(X_n - \hat{X}_n) = \theta\sigma^2(X_n - \hat{X}_n)v_{n-1}^{-1}$$

où v_{n-1} est calculé par récurrence avec l'équation précédente.

Estimation

Solution succincte de l'exercice 6.1 (Estimation de la moyenne et intervalle de confiance)**.**

1. Comme $|\phi| < 1$, le processus stationnaire X solution de l'équation AR(1) est un filtre causal de Z, et par conséquent, d'après un théorème du cours, on dispose du théorème de la limite centrale suivant :
$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,\gamma)$$
où $\gamma = 2\pi f_X(0)$ et où f_X est la densité spectrale de X, qui est donnée ici par $f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{1}{|1-\varphi e^{-i\lambda}|^2}$ pour tout $\lambda \in [-\pi,\pi]$, d'où enfin $\gamma = \sigma^2/(1-\varphi)^2$. Alternativement, on peut mener le calcul de la variance asymptotique directement :
$$\begin{aligned} n\mathbb{V}(\widehat{\theta}) &= \frac{1}{n}\sum_{0\leq i,j\leq n-1}\gamma_X(j-i) \\ &= \sum_{h=-(n-1)}^{n-1}\frac{n-h}{n}\gamma_X(h) \\ &= \sum_{h=-(n-1)}^{n-1}\left(1-\frac{h}{n}\right)\gamma_X(h) \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{\text{CVD}} \sum_{h\in\mathbb{Z}}\gamma_X(h) \\ &= \sum_{h\in\mathbb{Z}} e^{-ih\lambda}\gamma_X(h)\Big|_{\lambda=0} \\ &= 2\pi f_X(0) \end{aligned}$$
où la dernière identité provient d'un exercice précédent sur la densité spectrale ;
2. La convergence en loi précédente permet de construire un intervalle de confiance asymptotique $I_{n,\alpha}$ suivant de niveau de confiance $1-\alpha$. En effet, on écrit
$$\mathbb{P}\left(\theta \in \widehat{\theta} - \sqrt{\frac{\gamma}{n}}J_\alpha\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\gamma}}(\widehat{\theta}-\theta)\in J_\alpha\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(Z\in J_\alpha) = 1-\alpha$$
où $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $J_\alpha = [-q_{1-\alpha/2}, q_{1-\alpha/2}]$ où q_p est le quantile d'ordre p de $\mathcal{N}(0,1)$ c'est-à-dire $\mathbb{P}(Z \leq q_p) = p$, ce qui donne
$$I_{n,\alpha} = \left[\widehat{\theta} - \sqrt{\frac{\gamma}{n}}q_{1-\alpha/2}, \widehat{\theta} + \sqrt{\frac{\gamma}{n}}q_{1-\alpha/2}\right]$$

Cet intervalle de confiance permet de tester l'hypothèse statistique H_0 :«$\theta = 0$» contre l'hypothèse alternative H_1 :«$\theta \neq 0$». Pour $\alpha = 5\%$ on a $q_{1-\alpha/2} \approx 1.96$, ce qui donne avec les valeurs fournies pour n et $\widehat{\theta}$ l'intervalle $[-0.422, 0.963]$. Comme 0 appartient à cet intervalle, on accepte H_0 avec un niveau de confiance de 5% ;

3. Si $X^{(n)} = (X_0, \ldots, X_{n-1})$ alors $\mathrm{Cov}(X^{(n)}) = \mathrm{Cov}(Y^{(n)}) = \gamma_n$, d'où
$$\widetilde{Y}_n^{(n)} := \gamma_n^{-1/2} Y^{(n)} = \theta \gamma_n^{-1/2} \mathbf{1}_n + \gamma_n^{-1/2} X^{(n)} = \theta A + Z^{(n)}$$
où $Z^{(n)} = \gamma_n^{-1/2} X^{(n)}$ vérifie $\mathrm{Cov}(Z^{(n)}) = I_n$. On a donc
$$(A^\top A)^{-1} A \widetilde{Y}_n^{(n)} = (\mathbf{1}_n^\top \gamma_n^{-1/2} \gamma_n^{-1/2} \mathbf{1}_n)^{-1} \mathbf{1}_n^\top \gamma_n^{-1/2} \gamma_n^{-1/2} Y^{(n)} = \widetilde{\theta}_n.$$
Il s'agit donc tout simplement d'un estimateur par projection orthogonale obtenu par moindres carrés $\min_\theta \left\| \theta A - \widetilde{Y}_n^{(n)} \right\|$, bien connu pour le modèle linéaire ;

4. On a $\mathbb{E}(\widetilde{\theta}_n) = (\mathbf{1}_n^\top \gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n)^{-1} (\mathbf{1}_n^\top \gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n) \theta = \theta$ et
$$\mathbb{E}((\widetilde{\theta}_n)^2) = \frac{1}{(\mathbf{1}_n^\top \gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n)^2} \mathbb{E}((\mathbf{1}_n^\top \gamma_n^{-1} Y^{(n)})^2).$$
Or comme $\mathbf{1}_n^\top \gamma_n^{-1} Y^{(n)} = (\mathbf{1}_n^\top \gamma_n^{-1} Y^{(n)})^\top = Y^{(n)\top} \gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n$ (il s'agit d'un réel), on a
$$\begin{aligned}\mathbb{E}((\mathbf{1}_n^\top \gamma_n^{-1} Y^{(n)})^2) &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_n^\top \gamma_n^{-1} Y^{(n)} Y^{(n)\top} \gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n) \\ &= \mathbf{1}_n^\top \gamma_n^{-1} \mathbb{E}(Y^{(n)} Y^{(n)\top}) \gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n \\ &= \mathbf{1}_n^\top \gamma_n^{-1} (\gamma_n + \theta \mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^\top) \gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n \\ &= \mathbf{1}_n^\top \gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n + \theta (\mathbf{1}_n^\top \gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n)^2\end{aligned}$$
d'où
$$\mathbb{V}(\widetilde{\theta}_n) = \frac{1}{\mathbf{1}_n \gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n}.$$
Or d'après le cours (décomposition de Cholesky LDL de γ_n), on a
$$\gamma_n^{-1} = \Phi_n^\top \mathrm{Diag}\left(\frac{\sigma^2}{1-\phi^2}, \sigma^2, \ldots, \sigma^2 \right)^{-1} \Phi_n \quad \text{où} \quad \Phi_n(i,j) = \mathbf{1}_{i=j} - \phi \mathbf{1}_{i=j+1}.$$
En notant que $\Phi_n \mathbf{1}_n = (1-\phi, \ldots, 1-\phi, 1)^\top$, ceci permet d'établir la formule
$$\mathbf{1}_n^\top \gamma_n^{-1} \mathbf{1}_n = (\Phi_n \mathbf{1}_n)^\top D_n \Phi_n \mathbf{1}_n = (1-\phi)^2 \frac{1-\phi^2}{\sigma^2} + (n-2)(1-\phi)^2 \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^2}.$$
Donc finalement
$$n \mathbb{V}(\widetilde{\theta}_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \frac{\sigma^2}{(1-\phi)^2}.$$
Ainsi, les estimateurs $\widehat{\theta}_n$ et $\widetilde{\theta}_n$ sont asymptotiquement de même variance.

Solution succincte de l'exercice 6.2 (Comparaison de différents estimateurs pour un MA(1))**.**

1. On sait que $\gamma_X = \sigma^2(1+\theta^2)\mathbf{1}_{h=0} + \sigma^2 \theta \mathbf{1}_{h=\pm 1}$, ce qui donne $\widehat{\gamma}(0) = \widehat{\sigma}^2(1+\widehat{\theta}^2)$ et $\widehat{\gamma}(1) = \widehat{\sigma}^2 \widehat{\theta}$, d'où on tire
$$\widehat{\rho}(1) = \frac{\widehat{\gamma}(1)}{\widehat{\gamma}(0)} = \frac{\widehat{\theta}}{1+\widehat{\theta}^2}.$$

Cela donne l'équation du second degré $\widehat{\rho}(1)\widehat{\theta}^2 - \widehat{\theta} + \widehat{\rho}(1) = 0$ en $\widehat{\theta}$ dont le discriminant $\delta = 1 - 4\widehat{\rho}(1)^2$ est ≥ 0 ssi $|\widehat{\rho}(1)| \leq 1/2$. Si $|\widehat{\rho}(1)| \leq 1/2$ les solutions sont

$$\widehat{\theta} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\widehat{\rho}(1)}}{2\widehat{\rho}(1)}$$

et comme on souhaite que $|\theta| < 1$, on impose $|\widehat{\theta}| < 1$ ce qui donne

$$\widehat{\theta} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\widehat{\rho}(1)}}{2\widehat{\rho}(1)}.$$

Si $\widehat{\rho}(1) = 1/2$ alors $\widehat{\theta} = 1$ tandis que si $\widehat{\rho}(1) = -1/2$ alors $\widehat{\theta} = -1$. Pour rendre l'estimateur «continu», on pose finalement

$$\widehat{\theta} = g(\widehat{\rho(1)})$$

où

$$g(u) = \begin{cases} -1 & \text{si } u > 1/2, \\ \frac{1-\sqrt{1-4u^2}}{2u} & \text{si } |u| < 1/2, \\ +1 & \text{si } u < -1/2. \end{cases}$$

2. D'après le cours (formule de Bartlett)

$$\sqrt{n}(\widehat{\rho}(1) - \rho(1)) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, w_{1,1})$$

où

$$w_{i,j} = \sum_{k\geq 1} [\rho(k+i) + \rho(k-i) - 2\rho(i)\rho(k)] [\rho(k+j) + \rho(k-j) - 2\rho(j)\rho(k)].$$

Comme X est un MA(1) on a $\rho(h) = 0$ si $|h| > 1$ et donc (note : $\rho(0) = 1$)

$$w_{1,1} = \underbrace{(\rho(0) + 0 - 2\rho(1)^2)^2}_{k=1} + \underbrace{(\rho(1) + 0 - 0)^2}_{k=2} = 1 - 3\rho(1)^2 + 4\rho(1)^4,$$

ce qui donne

$$\sqrt{n}(\widehat{\rho}(1) - \rho(1)) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1 - 3\rho(1)^2 + 4\rho(1)^4).$$

3. On a $\widehat{\theta}^{(1)} = g(\widehat{\rho}(1)$. La méthode-delta donne

$$\sqrt{n}(g(\widehat{\rho}(1)) - g(\rho(1))) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \underbrace{g'(\rho(1))^2 w_{1,1}}_{=\sigma_1^2(\theta)}).$$

Un calcul donne

$$\sigma_1^2(\theta) = g'(\rho(1))^2 w_{1,1} = \frac{1 + \theta^2 + 4\theta^4 + \theta^6 + \theta^8}{(1-\theta^2)^2}.$$

4. On a $\sigma_2^2(\theta) = 1$. L'estimateur $\widehat{\theta}_2$ est meilleur que $\widehat{\theta}_1$ ssi $(1 =)\sigma_2^2(\theta) \leq \sigma_1^2(\theta)$ c.-à-d. ssi $1 + \theta^2 + 4\theta^4 + \theta^6 + \theta^8 \geq (1-\theta^2)^2 = 1 - 2\theta^2 + \theta^4$, ce qui est toujours vrai.
5. On a $\sigma_3(\theta)^2 = 1 - \theta^2$. L'estimateur $\widehat{\theta}_3$ est meilleur que $\widehat{\theta}_2$ ssi $(1 - \theta^2 =)\sigma_3(\theta)^2 \leq \sigma_1(\theta)^2 (= 1)$ ce qui est toujours vrai.